Normy macierzowe

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Pierwsze macierze na świecie, Tybet 650 rok p.n.e.

Zbadamy właściwości najstarszej znanej ną świecie macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Zadanie na dzisiaj

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Proszę policzyć następujące normy
Norma macierzowa Frobeniusa i normy macierzowe indukowane

$$\|A\|_F (\text{slajd 7})$$

$$\|A\|_1 (\text{slajd 9-11})$$

$$\|A\|_\infty (\text{slajd 12})$$

wyznacznik z macierzy A (slajd 19-21)
macierz odwrotną A^{-1} (slajd 22)
i współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond(A)_1 (\text{slajd 31})$$

$$cond(A)_\infty (\text{slajd 32})$$

Normy wektorowe i macierzowe

Norma wektorowa

$$\|x\| > 0 \text{ jeśli } x \neq 0$$

$$\|0\| = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Norma macierzowa

$$\|A\| > 0 \text{ jeśli } A \neq 0$$

$$\|0\| = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Normy wektorowe

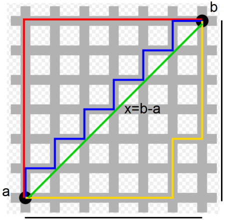


Figure: Norma wektorowa mierzy długość wektora lub odległość punktów np. $\|x\| = \|b - a\|$, dla $x = b - a$ wektora łączącego punkty a i b

$\|x\|_1 = \sum_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ norma jedynkowa (taksówkowa lub Manhatańska) (czerwona = niebieska = żółta)

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1,\ldots,n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ norma dwójkowa (Euklidesowa) (zielona linia)

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ norma nieskończoność (dłuższa czarna linia na brzegu)

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (p=1 taksówkowa, p=2 Euklidesowa)

Normy macierzowe indukowane z norm wektorowych

Norma wektorowa $\|x\|_v$ indukuje norme macierzową

$$\|A\|_M = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

Indukowane normy macierzowe

$$\|A\|_1 = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_1}\|_1 = max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1$$

$$\|A\|_2 = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

$$\|A\|_p = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_p}\|_p = max_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$$

$$\|A\|_\infty = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_\infty}\|_\infty = max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty$$

Dla każdej normy indukowanej mamy $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M\|x\|_v$

Norma Frobeniusa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Norma Frobeniusa (oryginalnia, nie indukowana norma macierzowa)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_F = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 4 + 9 + 16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$$

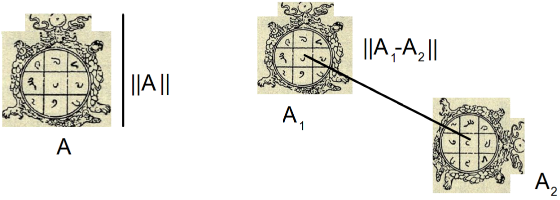


Figure: Każda norma macierzowa mierzy "długość" macierzy, lub "odległość" dwóch macierzy

Ferdinand Georg Frobenius

Figure: Niemiecki matematyk, urodzony 26 października 1849 w Berlinie, pracował na Uniwersytecie w Berlinie oraz na Uniwersytecie w Zurichu (w latach 1875-1892), zmarł 3 sierpnia 1917 w Berlinie.

Lista obiektów matematycznych nazwana na cześć Frobeniusa:
Arithmetic and geometric Frobenius, Frobenioid, Frobenius algebra, Frobenius category, Frobenius coin problem, Frobenius number, Frobenius covariant, Frobenius element, Frobenius endomorphism (also known as Frobenius morphism, Frobenius map), Frobenius determinant theorem, Frobenius formula, Frobenius group, Frobenius complement, Frobenius kernel, Frobenius inner product, Frobenius norm, Frobenius manifold, Frobenius matrix, Frobenius method, Frobenius normal form, Frobenius polynomial, Frobenius product, Frobenius pseudoprime, Frobenius reciprocity, Frobenius solution to the hypergeometric equation, Frobenius theorem (differential topology), Frobenius theorem (real division algebras), Frobenius's theorem (group theory), Frobenius conjecture, Frobenius–Schur indicator, Cauchy–Frobenius lemma, Perron–Frobenius theorem, Quadratic Frobenius test, Quasi-Frobenius ring

Norma indukowana jedynkowa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_1}\|_1 = max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1$$

$\|x\|_1 = 1$ w normie jedynkowej to znaczy $|x_1| + |x_2| = 1$ czyli

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}$ lub $x = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}$ wówczas

$$\|Ax\|_1 = \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix} \|_1 = \| \begin{bmatrix} \alpha + 2(1 - \alpha) \\ 3\alpha + 4(1 - \alpha) \end{bmatrix} \|_1 =$$

$$\| \begin{bmatrix} -\alpha + 2 \\ -\alpha + 4 \end{bmatrix} \|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$$

Norma indukowana jedynkowa

$x = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$ wówczas

$$\|Ax\|_1 = \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} \|_1 = \| \begin{bmatrix} -\alpha + 2(\alpha - 1) \\ -3\alpha + 4(\alpha - 1) \end{bmatrix} \|_1 =$$

$$\| \begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha - 4 \end{bmatrix} \|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$$

W obu przypadkach mamy $\|Ax\|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$
podstawmy różne α
($\alpha = 0$) wówczas $=$ 2+4=6
($\alpha = 1$) wówczas $=$ 1+3=4
($\alpha = 1/2$) wówczas $=$ 3/2+7/2=10/2=5 (funkcja liniowa na (0,1))

$$\|A\|_1 = max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = 6$$

Norma indukowana jedynkowa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inny sposób liczenia (maksymalna suma wartości bezwzględnych z kolumn)

$$\|A\|_1 = max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1,\ldots,n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = max\{1+3, 2+4\} = max\{4, 6\} = 6$$

Norma indukowana nieskończoność

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_\infty}\|_\infty = max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty$$

$max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty$
$\|x\|_\infty = 1$ oznacza $max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$ czyli punkty
(-1,*),(1,*),(*,-1),(*,1) Dość trudne do sprawdzenia.
Inny sposób liczenia (równoważny) (maksymalna suma wartości bezwzględnych z wierszy)

$$\|A\|_\infty = max_{i=1,\ldots,n}\sum_{j=1,\ldots,n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = max\{1+2, 3+4\} = max\{3, 7\} = 7$$

Norma indukowana dwójkowa (norma spektralna)

Za tydzień (wymaga policzenia wartości własnych macierzy)

Minor macierzy

$$M_{i,j} = \left| \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{1(j-1)} & \cancel{A_{1j}} & A_{1(j+1)} & \vdots & A_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{(i-1)1} & \vdots & A_{(i-1)(j-1)} & \cancel{A_{(i-1)j}} & A_{(i+1)(j+1)} & \vdots & A_{(i-1)m} \\ \cancel{A_{i1}} & \vdots & \cancel{A_{i(j-1)}} & \cancel{A_{ij}} & \cancel{A_{i(j+1)}} & \vdots & \cancel{A_{im}} \\ A_{(i+1)1} & \vdots & A_{(i+1)(j-1)} & \cancel{A_{(i+1)j}} & A_{(i+1)(j+1)} & \vdots & A_{(i+1)m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \vdots & A_{n(j-1)} & \cancel{A_{nj}} & A_{n(j+1)} & \vdots & A_{nm} \end{bmatrix} \right|$$

Minory macierzy - przykład

Minory macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$M_{1,1} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = 5 * 9 - 6 * 8 = -3$$

$$M_{1,2} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \right| = 4 * 9 - 6 * 7 = -6$$

$$M_{1,3} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right| = 4 * 8 - 5 * 7 = -3$$

$$M_{2,1} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = 2 * 9 - 3 * 8 = -6$$

itd. $M_{2,2}$, $M_{2,3}$, $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, $M_{3,3}$

Dopełnienie algebraiczne (cofactor)

Dopełnienie algebraiczne macierzy A to $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} * M_{1,1} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \right| = 5*9-6*8 = -3$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} * M_{1,2} = -\left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix} \right| = -\left| \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \right| = -(-6) = 6$$

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} * M_{1,3} = \left| \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right| = 4*8-5*7 = -3$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & \vdots & C_{1j} & \vdots & C_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{i1} & \vdots & C_{ij} & \vdots & C_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & \vdots & C_{nj} & \vdots & C_{nm} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} \left|\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right| \\ -\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right| \\ \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz dopełnień algebraicznych (cofactors)

$$adj(A) = cof(A)^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \vdots & C_{i1} & \vdots & C_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1j} & \vdots & C_{ij} & \vdots & C_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1m} & \vdots & C_{im} & \vdots & C_{nm} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad adj(A) = cof(A)^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy i macierz odwrotna

Wyznacznik macierzy

$$|A| = det(A) = \sum_{j=1,\ldots,n} A_{ij} det(C_{ij})$$

(Rozwinięcie wzdłuż wybranego wiersza wartości razy kofaktory)
Wyznacznik równa się też iloczynowi wartości własnych

$$|A| = det(A) = \Pi_{i=1,\ldots,n} \lambda_i = \lambda_1 * \ldots * \lambda_n$$

Macierz odwrotna

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A)$$

Przykład (Rekurencyjne obliczanie wyznacznika)
(wybieramy pierwszy wiersz, ale mógł to być inny wiersz - najlepiej taki który ma najwięcej zer)
$det(A) =$

$$det\begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \sum_{i=1,2,3} A_{1i} det(C_{1i}) = \sum_{i=1,2,3} A_{1i}(-1)^{1+i} det(M_{1,i}) =$$

$$(-1)^2 * 2 * det\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + (-1)^3 * 8 * det\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} + (-1)^4 * 14 * det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$2\,(5 * 10 - 8 * 6) - 8\,(2 * 10 - 8 * 3) + 14\,(2 * 6 - 5 * 3) =$$

$$2(50 - 48) - 8(20 - 24) + 14(12 - 15) =$$

$$2 * 2 + -8 * (-4) + 14 * (-3) = 4 + 32 - 42 = -6$$

Wyznacznik macierzy

Metoda z przekątnymi dla macierzy 3 na 3 (oraz 2 na 2)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 8 & 14 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{matrix} \end{array}$$

$= 2*5*10+8*8*3+14*2*6-2*8*6-8*2*10-14*5*3 = -6$

Czy ta metoda działa dla macierzy 4 na 4 ???

Wyznacznik równa się również iloczynowi wartości własnych.

Jeśli policzę LU faktoryzacje macierzy, to wartości własne będą na przekątnej U

Iloczyn wartości z przekątnej U to wyznacznik macierzy

$$det(A) = \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right| =$$

=2*5*9+2*6*7+3*4*8-2*6*8-2*4*9-3*5*7=-3

$$cof(A) = \begin{bmatrix} \left|\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right| \\ -\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right| \\ \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right| & -\left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right| & \left|\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A) = \frac{1}{det(A)} * cof(A)^T = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A) = \frac{1}{det(A)} * cof(A)^T = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0.666 & -0.666 \end{bmatrix}$$

Gdy rozwiązujemy $Ax = b$ wówczas nie potrzebujemy znać A^{-1} tylko akcję $A^{-1}b = x$ dla danego b.
Wówczas $A = LU$, $A^{-1}b = x$ czyli $b = Ax$ czyli $b = LUx$ czyli $b = Lc$ i $c = Ux$.
Zazwyczaj unika się numerycznego obliczania A^{-1} ponieważ jest to bardzo kosztowne.

Współczynnik uwarunkowania macierzy

Mam macierz A i wektor prawej strony b.
Tworzę i rozwiązuje układ równań

$$Ax = b$$

Co się stanie jak zmodyfikuję troszkę prawą stronę $b + \delta b$ i rozwiąże układ równań?
Moje rozwiązanie będzie trochę inne $x + \delta x$:

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

Jak bardzo będzie różne?
O tym powie nam współczynnik uwarunkowania macierzy $cond(A)$ (condition number)

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * 999/1000$

(998-999*999/1000 = (998*1000-999*999)/1000 = -1/1000)

(1997-1999*999/1000 = (1997*1000-1999*999)/1000 = -1/1000)

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 0 & -1/1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ -1/1000 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 1,\ 1000 * x_1 = 1999 - 999 = 1000$ czyli

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Co się stanie jak zburzymy prawą stronę o -/+0.01

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1998.99 \\ 1997.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =?$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1998.99 \\ 1997.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =?$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * 999/1000$

(998-999*999/1000 = (998*1000-999*999)/1000 = -1/1000)

(1997.01-1998.99*999/1000 = (1997.01*1000-1999.99*999)/1000 = 18.99/1000)

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 0 & -1/1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 18.99/1000 \end{bmatrix}$$

$-x_2/1000 = 18.99/1000$ czyli $x_2 = -18.99$;

$1000 * x_1 = 1998.99 - 999 * (-18.99) = 20.97$ czyli

$$\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1998.99 \\ 1997.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.97 \\ -18.99 \end{bmatrix}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

Mam macierz A i wektor prawej strony b.
Tworzę i rozwiązuje układ równań

$$Ax = b$$

Co się stanie jak zmodyfikuję troszkę prawą stronę $b + \delta b$ i rozwiąże układ równań?
Moje rozwiązanie będzie trochę inne $x + \delta x$:

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$Ax + A\delta x = b + \delta b$$

(skracamy z $Ax = b$)

$$A\delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

Jak sprawdzić jak duże jest δx ? Zmierzyć normą wektorową!

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

Podobnie dla $Ax = b$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

Przemnażamy

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A^T)$$

$$det(A) = | \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} | =$$

$$1000 * 998 - 999 * 999 = 998000 - 998001 = -1$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & X \\ X & 998 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} X & X \\ 999 & X \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} X & 999 \\ X & X \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 1000 & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A^T)$$

$$det(A) = -1$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -1 * adj(A) = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Pytanie: Jakiej normy macierzowej użyć żeby policzyć $cond(A)$?

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$$
$$cond_F(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \text{(za tydzień)}$$
$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$
$$cond_F(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = max\{1000 + 999, 999 + 998\} = max\{1999, 1997\} = 1999$$

(maksymalna suma wartości bezwzględnych z kolumn)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = max\{|-998|+999, 999+|-1000|\} = max\{1997, 1999\} = 1999$$

(maksymalna suma wartości bezwzględnych z kolumn)

$$cond_1(A) = 1999 * 1999 = 3996001$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty}\|A^{-1}\|_{\infty}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = max\{1000 + 999, 999 + 998\} = max\{1999, 1997\} = 1999$$

(maksymalna suma wartości bezwzględnych z wierszy)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = max\{|-998|+999, 999+|-1000|\} = max\{1997, 1999\} = 1999$$

(maksymalna suma wartości bezwzględnych z wierszy)

$$cond_{\infty}(A) = 1999 * 1999 = 3996001$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy - sens

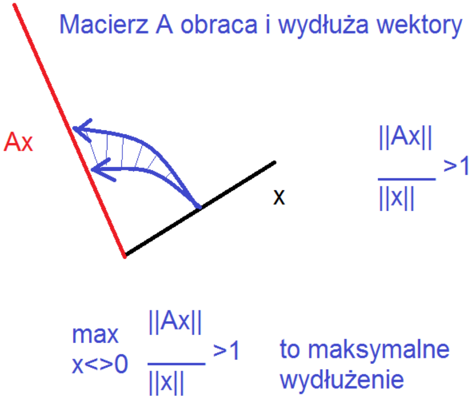
$$cond(A) = \frac{maxmag(A)}{minmag(A)} = \frac{\text{maksymalne wydłużenie}}{\text{minimalne wydłużenie}}$$

$maxmag(A) = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ =maksimum po wszystkich nie zerowych wektorach, o ile macierz A wydłużyła wektor (mierząc długość w normie $\|Ax\|$) podzielone przez oryginalną dlugość wektora (mierząc długość w normie $\|x\|$) $=$ ile razy maksymalnie macierz A wydłuża

$minmag(A) = min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ =minimum po wszystkich nie zerowych wektorach, o ile macierz A wydłużyła wektor (mierząc długość w normie $\|Ax\|$) podzielone przez oryginalną dlugość wektora (mierząc długość w normie $\|x\|$) $=$ ile razy minimalnie macierz A wydłuża

$$maxmag(A) = \frac{1}{minmag(A^{-1})} \quad minmag(A) = \frac{1}{maxmag(A^{-1})}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy - sens



$$cond(A) = \frac{maxmag(A)}{minmag(A)} = \frac{\text{maksymalne wydłużenie}}{\text{minimalne wydłużenie}}$$