Wartości i wektory własne

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Pierwsze macierze na świecie, Tybet 650 rok p.n.e.

Zbadamy właściwości najstarszej znanej ną świecie macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Zadanie na dzisiaj

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Metodą potęgową proszę znaleźć największą wartość własną macierzy A (slajd 23) Prawda że ta macierz jest niesamowita?
Proszę policzyć normę macierzy

$$\|A\|_2 (\text{slajd } 9)$$

Proszę policzyć macierz odwrotną A^{-1} (było - wykład 3 slajd 22)
Metodą potęgową proszę znaleźć największą wartość własną macierzy A^{-1} (slajd 23)
Proszę policzyć normę macierzy odwrotnej

$$\|A^{-1}\|_2 (\text{slajd } 12)$$

Proszę policzyć współczynnik uwaunkowania macierzy

$$cond_2(A) (\text{slajd } 12)$$

Prawda że ta macierz jest niesamowita?

Eigenvalue/eigenvector problem:

Given $n \times n$ matrix A, an eigenvalue/eigenvector pair $\lambda, \underline{x}$ is a nontrivial solution to

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

nontrivial $\Rightarrow$ $\underline{x} \neq \emptyset$

If

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} = \lambda I \underline{x} \qquad I = \text{identity}$$

then

$$(A - \lambda I)\underline{x} = \emptyset$$

If $A - \lambda I$ is nonsingular then $\underline{x} = \emptyset$ is the only solution

Defn: An eigenvalue λ of A is a ~~value~~ number that makes $A - \lambda I$ singular.

$A - \lambda I$ singular $\Rightarrow$ $\det(A - \lambda I) = \emptyset$

λ eigenvalue of A $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = \emptyset$

Defn: $\det(A - \lambda I) = \emptyset$ is called the characteristic equation for A

If $A - \lambda I$ is singular, $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ has many nontrivial solutions $\underline{x}$. Any one of these is called an eigenvector corresponding to λ.

Ex: $A = \begin{bmatrix} +2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow$ polynomial of degree 2 in λ

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$(\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$
$$\lambda = +3, \quad \lambda = +1$$

Thomas J.R. Hughes

Figure: Profesor Uniwersytetu Teksańskiego, 157 artykułów i 12 tysięcy cytowań, wysoko cytowany naukowiec (1 procent najlepiej cytowanych na świecie) w informatyce

Normy macierzowe indukowane z norm wektorowych

Norma wektorowa $\|x\|_v$ indukuje norme macierzową

$$\|A\|_M = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

Indukowane normy macierzowe

$$\|A\|_2 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Dla każdej normy indukowanej mamy $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v$

Norma indukowana dwójkowa (norma spektralna)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

$\|x\|_2 = 1$ w normie dwójkowej to znaczy $x_1^2 + x_2^2 = 1$ czyli że leżą na okręgu o promieniu 1 czyli $x = \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix}$

wówczas szukamy takiego θ która da największą wartość

$$max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = max_\theta \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} \|_2 = max_\theta \| \begin{bmatrix} cos\theta + 2sin\theta \\ 3cos\theta + 4sin\theta \end{bmatrix} \|_2$$

$$= max_\theta \{((cos\theta + 2sin\theta)^2 + (3cos\theta + 4sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}\} = \ldots$$

Inny sposób obliczania

$$\|A\|_2 = |\lambda_1|$$

gdzie $|\lambda_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A

Wartości i wektory własne

Wartości własne λ (eigenvalues) i wektory własne x (eigenvectors) spełniają

$$Ax = \lambda x$$

co jest równoważne równaniu

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Równanie takie ma rozwiązanie zerowe wtedy gdy wyznacznik $= 0$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Z tego równania można policzyć wartości własne (oraz wektory własne, ale my ich teraz nie potrzebujemy)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_2 = |\lambda_1|$$

Wartości własne a norma dwójkowa (spektralna)

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Szukam największego λ by

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 * 3 =$$

$$= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 * 1 * (-2) = 25 + 8 = 33$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{33} = 5.7445$,
$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} = 5.3722$
$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} = -0.3722$

$$\|A\|_2 = |\lambda_1| = 5.3722$$

Historia wartości własnych

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/math-origins-eigenvectors-and-eigenvalues

"Old English used the word agen to mean "owned or possessed (by)," and while this usage no longer exists in modern English, eigen is used to mean "self" in modern German."

"The proper mathematical history of the eigenvalue begins with celestial mechanics, in particular with Augustin-Louis Cauchy's 1829 paper "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planétes" ("On the equation which helps one determine the secular inequalities in the movements of the planets")."

Wektory własne macierzy bezwładności bryły definiują oś obrotu bryły (co ma na przykład zastosowanie w obliczaniu orbit ciał niebieskich)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A^T)$$

$$det(A) = | \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} | =$$

$$1000 * 998 - 999 * 999 = 998000 - 998001 = -1$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & X \\ X & 998 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} X & X \\ 999 & X \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} X & 999 \\ X & X \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 1000 & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix}$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * adj(A^T)$$

$$det(A) = -1$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -1 * adj(A) = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$cond_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = |\lambda_1|$$

(gdzie $|\lambda_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = |\hat{\lambda}_1|$$

(gdzie $|\hat{\lambda}_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A^{-1})

$$cond_2 = |\lambda_1| * |\hat{\lambda}_1|$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

Wartości własne A, tzn $Ax = \lambda x$ czyli $(A - \lambda I)x = 0$, możliwe gdy $det(A - \lambda I) = 0$ czyli

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 - \lambda & 999 \\ 999 & 998 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1000 - \lambda & 999 \\ 999 & 998 - \lambda \end{bmatrix} = (1000 - \lambda)(998 - \lambda) - 999 * 999$$

$$= 998000 - 1000\lambda - 998\lambda + \lambda^2 - 998001 =$$

$$= \lambda^2 - 1998\lambda - 1$$

$\Delta = 1998 * 1998 - 4 * 1 = 3992000$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3992000} = 1997.998$
$\lambda_2 = \frac{1998 - 1997.998}{2} = 0,0001$
$\lambda_1 = \frac{1998 + 1997.998}{2} = 1997,999$ czyli $\|A\|_2 = 1997,999$
(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

Wartości własne A^{-1}, tzn $A^{-1}x = \lambda x$ czyli $(A^{-1} - \lambda I)x = 0$, możliwe gdy $det(A^{-1} - \lambda I) = 0$ czyli

$$(A^{-1} - \lambda I) = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -998 - \lambda & 999 \\ 999 & -1000 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A^{-1} - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -998 - \lambda & 999 \\ 999 & -1000 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-998 - \lambda)(-1000 - \lambda) - 999 * 999 =$$

$$(998 + \lambda)(+1000 + \lambda) - 999 * 999 = 998000 + 998\lambda + 1000\lambda + \lambda^2 - 998001$$

$$= \lambda^2 + 1998\lambda - 1$$

$\Delta = 1998 * 1998 + 4 * 1 = 3992008$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3992008} = 1998,001$
$\lambda_1 = \frac{-1998 - 1998,001}{2} = -1998,0005$ czyli $\|A^{-1}\|_2 = 1998,005$
$\lambda_2 = \frac{-1998 + 1998,001}{2} = 0,0005$
(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \lambda_1 = 1997,999$$

(gdzie λ_1 to największa wartość własna macierzy A)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \hat{\lambda}_1 = 1998,005$$

(gdzie $\hat{\lambda}_1$ to największa wartość własna macierzy A^{-1})

$$cond_2 = \lambda_1 * \hat{\lambda}_1 = 1997,999 * 1998,005 = 3992101,90195$$

Wartości własne dla ogólnej macierzy 2x2

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

Szukam największego λ by

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-a_{11} - a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

czyli $a = 1, b = -a_{11} - a_{22}, c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\Delta = b^2 - 4ac = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 6a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\|A\|_2 = MAX\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Wartości i wektory własne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -12 & \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{1}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = | \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} | = 0$$

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - (-1) * (-1) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

czyli wartości własne $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$
(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Wartości i wektory własne

Dla danej wartości własnej z reguły mamy wiele wektorów własnych
Wektory własne dla dla wartości własnej $\lambda_1 = 3$

To taki wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ że $Ax = \lambda_1 Ix$ czyli $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_1 I)x = 0$ czyli

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \to x_1 = -x_2$$

Każdy wektor własny postaci $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ jest dobry

na przykład $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Wartości i wektory własne

Dla danej wartości własnej z reguły mamy wiele wektorów własnych
Wektory własne dla dla wartości własnej $\lambda_2 = 1$

To taki wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ że $Ax = \lambda_2 Ix$ czyli $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda_2 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_2 I)x = 0$ czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \to x_1 = x_2$$

Każdy wektor własny postaci $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ jest dobry

na przykład $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jeśli macierz jest trójkątna górna, to jej wartości własne leżą na przekątnej

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ (wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Wartości i wektory własne

Jeśli macierz A jest symetryczna, wówczas wartości własne i wektory własne są rzeczywiste
Jeśli macierz A nie jest symetryczna, wówczas wartości własne mogą być zespolone

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = 0$ czyli $| \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} | = 0$
czyli $(2-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
czyli $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 * 5 = -4$, czyli $\sqrt{\Delta} = 2i$ (i jednostka zespolona)
czyli$\lambda_i = \frac{-b+/-\sqrt{\Delta}}{2a}$ czyli $\lambda_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$, $\lambda_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$.

Wartości własne dla macierzy 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = | \begin{bmatrix} 4-\lambda & 9 & 2 \\ 3 & 5-\lambda & 7 \\ 8 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} | = 0$$

$$(4-\lambda)| \begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} | -9| \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6-\lambda \end{bmatrix} | +2| \begin{bmatrix} 3 & 5-\lambda \\ 8 & 1 \end{bmatrix} | = 0$$

$$(4-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) - 7 - 9 * 3(6-\lambda) - 56 + 2 * 3 * 1 - (5-\lambda) * 8 = 0$$

Trudne do rozwiązania - dostajemy $\lambda_1 = 15$, oraz dwie wartości zespolone $\lambda_2, \lambda_3 = 4.89i$. Czyli $\|A\|_2 = 15$.

Metoda potęgowa (power method) iteracja 1

Dla $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ szukam z i λ by $Az = \lambda z$

Zaczynamy od wybranego losowo $z^{(1)}$, na przykład $z^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Obliczamy $w^{(1)} = Az^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Wybieramy $\lambda^{(1)}$ = największa współrzędna z wektora $w^{(1)}$, czyli $\lambda^{(1)} = max_j |w_j^{(1)}|$. U nas $\lambda^{(1)} = 1$. Błąd iteracji

$$e^{(1)} = \|w^{(1)} - \lambda^{(1)} z^{(1)}\| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \| = 1 > \epsilon$$

Następnie $z^{(2)} = w^{(1)}/\lambda^{(1)}$. U nas $z^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} /1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i iterujemy

$$z^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w^{(2)} = Az^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda^{(2)} = max_j|w_j^{(2)}| = 2$.

Błąd iteracji

$$e^{(2)} = \|w^{(2)} - \lambda^{(2)} z^{(2)}\| = \| \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \| = 2 > \epsilon$$

Następnie $z^{(3)} = w^{(2)}/\lambda^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} /2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i iterujemy dalej

Metoda potęgowa (power method) iteracja 3

$$z^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w^{(3)} = Az^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda^{(3)} = max_j |w_j^{(3)}| = 4.$

Błąd iteracji

$$e^{(3)} = \|w^{(3)} - \lambda^{(3)} z^{(3)}\| = \| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \| = 1 > \epsilon$$

Następnie $z^{(4)} = w^{(3)}/\lambda^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} /4 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0.75 \end{bmatrix}$ i iterujemy dalej

Metoda potęgowa (power method) iteracja 4

$$z^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$w^{(4)} = Az^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -3.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$\lambda^{(4)} = max_j |w_j^{(4)}| = 3.5.$

Błąd iteracji $e^{(4)} = \|w^{(4)} - \lambda^{(4)} z^{(4)}\| = \| \begin{bmatrix} 2.5 \\ -3.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} - 3.5 \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0.75 \end{bmatrix} \| =$

$\| \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \| = 0.5 > \epsilon$

Następnie $z^{(5)} = w^{(4)}/\lambda^{(4)} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} /3.5 = \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix}$ i iterujemy

dalej

$$z^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix}$$

$$w^{(5)} = Az^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.428 \\ -3.428 \\ 2.428 \end{bmatrix}$$

$\lambda^{(5)} = max_j |w_j^{(5)}| = 3.428$.

Błąd iteracji $e^{(5)} = \|w^{(5)} - \lambda^{(5)} z^{(5)}\| =$

$$\| \begin{bmatrix} 2.428 \\ -3.428 \\ 2.428 \end{bmatrix} - 3.428 \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.0005 \\ 0.02 \end{bmatrix} \| = 0.02 < 0.1$$

Znaleźliśmy największą wartość własną $\lambda = 3.428$ oraz wektor własny $z = \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix}$

$Az \approx \lambda z$

Metoda potęgowa (power method) sprawdzenie

Znaleźliśmy największą wartość własną $\lambda = 3.428$

oraz odpowiadający mu wektor własny $z = \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix}$

$Az \approx \lambda z$

$$Az = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4{\color{blue}28} \\ -3.428 \\ 2.4{\color{blue}28} \end{bmatrix}$$

$$\lambda z = 3.428 \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1.0 \\ 0.714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4{\color{red}48} \\ -3.428 \\ 2.4{\color{red}48} \end{bmatrix}$$

dla dokładności $\epsilon = 0.1$