Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)
&
Rachunek różniczkowy macierzowy

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Zadanie na dzisiaj

1) Proszę dokonać rozkładu według wartości osobliwych (singular value decomposition) (slajd 8)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

2) Dla $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 sinx_2 cosx_3 \\ x_1 sinx_2 sinx_3 \\ x_1 cosx_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, proszę policzyć (slajd 25)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

oraz Jakobian $det(\frac{\partial y}{\partial x})$ (slajd 26)

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Tym razem mamy macierz która może nie być kwadratowa (macierz ma n wierszy i m kolumn, reprezentuje więc odwzorowane liniowe z $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$)

$$A \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

Rozkład SVD to coś podobnego do LU lub QR faktoryzacji, można wykonać go również dla macierzy nie będącej macierzą kwadratową.

Def. **range** (obraz operatora reprezentowanego przez macierz A)

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in Ax : x \in \mathcal{R}^n\}$$

Def.**rank** (rząd macierzy A)

$$rankA = dim\mathcal{R}(A)$$

Def. **null space** (jądro operatora reprezentowanego przez macierz A)

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{R}^m : Ax = 0\}$$

Mamy $dim\mathcal{R}(A) + dim\mathcal{N}(A) = m$

Rozkład według wartości osobliwych Singular Value Decomposition (SVD)

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ da się zdekomponować

$$A = U \Sigma V^T$$

$U \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $U^T = U^{-1}$, $V \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $V^T = V^{-1}$ (macierze ortogonalne), gdzie $\Sigma \in \mathcal{R}^{n \times m}$ to macierz wartości osobliwych σ_i

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$r = rank(A) =$ liczba liniowo niezależnych kolumn
Każda macierz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ jest ortogonalnie równoważna do macierzy diagonalnej

Interpretacja geometryczna

$A = U\Sigma V^T \quad /V$, V jest ortogonalne czyli $V^T V = V^{-1}V = I$

czyli $AV = U\Sigma$. Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \left[\begin{matrix} [\,5 \quad 2 \quad 4\,] \\ [\,0 \quad 2 \quad -1\,] \\ [\,-2 \quad 1 \quad 2\,] \end{matrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy zbiór wektorów bazy $u_1, \ldots, u_r$ w przestrzeni $\mathcal{R}^n$

Mamy zbiór wektorów bazy $v_1, \ldots, v_r$ w przestrzeni $\mathcal{R}^m$

Mamy odwzorowanie $A \in \mathcal{R}^{n\times m}$ które przerzuca jedną bazę w drugą

$Av_i = \sigma_i u_i$ dla $i = 1, \ldots, r$

$A^T u_i = \sigma_i v_i$ dla $i = 1, \ldots, r$

Rozkład według wartości osobliwych $A = U\Sigma V^T$

$$
\begin{array}{r}
v_1 \to \sigma_1 \to u_1 \\
\vdots \to A \quad \to \vdots \\
v_r \to \sigma_r \to u_r \\
v_{r+1} \to 0 \\
\vdots \\
v_m \to 0
\end{array}
$$

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in Ax : x \in \mathcal{R}^n\}; \qquad \mathcal{R}(A) = span\{u_1, ..., u_r\}$$

$$rankA = dim\mathcal{R}(A) = r$$

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{R}^m : Ax = 0\}; \qquad \mathcal{N}(A) = span\{v_{r+1}, ..., v_n\}$$

Rozkład według wartości osobliwych $A^{-1} = A^T = V\Sigma^{-1}U^T$

$$
\begin{aligned}
u_1 \to \frac{1}{\sigma_1} &\to v_1 \\
\vdots \to A^T \quad &\to \vdots \\
u_r \to \frac{1}{\sigma_r} &\to v_r \\
u_{r+1} &\to 0 \\
&\vdots \\
u_n &\to 0
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{R}(A^T) = \{y \in A^T x : x \in \mathcal{R}^m\}$$

$$\mathcal{R}(A^T) = span\{v_1, ..., v_r\}$$

$$rank A^T = dim \mathcal{R}(A^T) = r$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \{x \in \mathcal{R}^n : A^T x = 0\}$$

$$\mathcal{N}(A^T) = span\{u_{r+1}, ..., u_n\}$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ da się zdekomponować

$$A = U \Sigma V^T$$

Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_1 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_2 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_3 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

gdzie $A \in \mathcal{R}^{2 \times 3}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$,
σ_1, σ_2 to pierwiastki wartości własnych λ_1, λ_2 macierzy kwadratowej AA^T, czyli

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

$u_1, u_2 \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$ wektory własne AA^T (left singular values of A)
$v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{R}^{3 \times 1}$ wektory własne $A^T A$ (right singular values of A)

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny $det(AA^T - \lambda I) = 0$

$$det(AA^T - \lambda I) = | \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ 2 & (8-\lambda) \end{bmatrix} | =$$

$(5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 40 - 5\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

równanie kwadratowe $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 * 1 * 36 = 25$,
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$
$\lambda = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4$, oraz $\lambda = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9$,
Sortujemy od największej do najmniejszej $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.
Wartości osobliwe $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Teraz obliczamy wektory własne

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4$$

$$AA^T u_1 = \lambda_1 u_1, \quad AA^T v_2 = \lambda_2 u_2$$

$$(AA^T - \lambda_9 I)u_1 = 0, \quad (A^T A - \lambda_4 I)u_2 = 0$$

$$(AA^T - 9 * I)u_1 = 0, \quad (A^T A - 4 * I)u_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 \\ 2 & (8-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 \\ 2 & (8-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

Rozkład według wartości osobliwych Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 \\ 2 & (8-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4u_1^1 + 2u_1^2 = 0; \quad 2u_1^1 - 1u_1^2 = 0;$$

$$4u_1^1 = 2u_1^2; \quad 2u_1^1 = u_1^2;$$

czyli

$$u_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|u_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|u_1\|_2}$ gdzie $\|u_1\|_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ czyli

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 \\ 2 & (8-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_2^1 + 2u_2^2 = 0; \quad 2u_2^1 + 4u_2^2 = 0;$$

$$u_2^1 = -2u_2^2; \quad 2u_2^1 = -4u_2^2;$$

czyli

$$u_2 = \alpha \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|u_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|u_2\|_2}$ gdzie $\|u_2\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
czyli $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$U = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozkład według wartości osobliwych Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny $det(A^T A - \lambda I) = 0$

$$det(A^T A - \lambda I) = | \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 & 4 \\ 2 & (4-\lambda) & 0 \\ 4 & 0 & (4-\lambda) \end{bmatrix} | =$$

$$(5-\lambda)(4-\lambda)^2 + 2*0*4 + 4*2*0 - (5-\lambda)*0*0 - 2*2*(4-\lambda) - 4*(4-\lambda)*4 =$$

$$(5-\lambda)\color{red}{(4-\lambda)}(4-\lambda) - 2*2*\color{red}{(4-\lambda)} - 4*\color{red}{(4-\lambda)}*4 =$$

$$\color{red}{(4-\lambda)}((5-\lambda)(4-\lambda) - 2*2 - 4*4)) =$$

$$\color{red}{(4-\lambda)}\color{blue}{((5-\lambda)(4-\lambda) - 20))} = 0$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$(4-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda)-20))=0$$

$$(4-\lambda)=0 \implies \lambda=4$$

$((5-\lambda)(4-\lambda)-20))=0; \quad 20-4\lambda-5\lambda+\lambda^2-20=0; \quad \lambda^2-9\lambda=0$

równanie kwadratowe $\lambda(\lambda-9)=0$ czyli $\lambda=0$ lub $\lambda=9$
Sortujemy od największej do najmniejszej $\lambda_1=9, \lambda_2=4, \lambda_3=0.$
Wartości osobliwe $\sigma_1=\sqrt{9}=3$, $\sigma_2=\sqrt{4}=2$

Teraz obliczamy wektory własne

$$A^T A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A^T A v_2 = \lambda_2 v_2, \quad A^T A v_3 = \lambda_3 v_3$$

$$(A^T A - \lambda_1 I) v_1 = 0, \quad (A^T A - \lambda_2 I) v_2 = 0, \quad (A^T A - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

$$(A^T A - 9 * I) v_1 = 0, \quad (A^T A - 4 * I) v_2 = 0, \quad (A^T A - 0 * I) v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 & 4 \\ 2 & (4-9) & 0 \\ 4 & 0 & (4-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 & 4 \\ 2 & (4-4) & 0 \\ 4 & 0 & (4-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 0$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4v_1^1 + 2v_1^2 + 4v_1^3 = 0; \quad 2v_1^1 - 5v_1^2 = 0; \quad 4v_1^1 - 5v_1^3 = 0;$$

$$-4v_1^1 + 2v_1^2 + 4v_3^1 = 0; \quad 2v_1^1 = 5v_1^2; \quad 4v_1^1 = 5v_1^3;$$

na przykład $v_1^1 = 5,\ v_1^2 = 2,\ v_1^3 = 4$
wówczas $-4 * 5 + 2 * 2 + 4 * 4 = -20 + 4 + 16 = 0;$

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_1\|_2}$ gdzie
$\|v_1\|_2 = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ czyli

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_2^1 + 2v_2^2 + 4v_2^3 = 0; \quad 2v_2^1 = 0; \quad 4v_2^1 = 0$$

$$v_2^1 = 0; \quad 2v_2^2 = -4v_2^3;$$

czyli

$$v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_2\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_2\|_2}$ gdzie $\|v_2\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
czyli

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$5v_3^1 + 2v_3^2 + 4v_3^3 = 0; \quad 2v_3^1 + 4v_3^2 = 0; \quad 4v_3^1 + 4v_3^3 = 0$$

$$5v_3^1 + 2v_3^2 + 4v_3^3 = 0; \quad v_3^2 = -\frac{1}{2}v_3^1; \quad v_3^3 = -v_3^1$$

Przyjmuję $v_3^1 = 1$ wówczas $v_3^2 = -\frac{1}{2}$, oraz $v_3^3 = -1$ czyli

$$v_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T = (inna)\alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_3\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_3\|_2}$ gdzie

$\|v_3\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ czyli

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$V = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 2 & 6 & 1\sqrt{5} \\ 4 & -3 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Szybszy sposób na policzenie v_1, v_2, v_3

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T = V\Sigma U^T$$

$$A^T U = V\Sigma$$

$$V = A^T U \Sigma^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}v_2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}v_3\end{bmatrix}\end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}u_2\end{bmatrix}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1\end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix}u_1\end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \qquad \begin{bmatrix}v_2\end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix}u_2\end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix}v_1\end{bmatrix} = \sigma_1^{-1} A^T \begin{bmatrix}u_1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}v_2\end{bmatrix} = \sigma_2^{-1} A^T \begin{bmatrix}u_2\end{bmatrix}$$

Szybszy sposób na policzenie v_1, v_2, v_3

$$v_1 = \sigma_1^{-1} A^T u_1; \quad v_2 = \sigma_2^{-1} A^T u_2$$

Mamy $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, czyli $\sigma_1^{-1} = \frac{1}{3}$, $\sigma_2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T; \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$v_1 = \sigma_1^{-1} A^T u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1*1+2*2 \\ 2*1+0*2 \\ 0*1+2*2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \sigma_2^{-1} A^T u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1*2-2*1 \\ 2*2+0 \\ 0*2-1*2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Natomiast v_3 liczymy jak poprzednio

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ da się zdekomponować

$$A = U \Sigma V^T$$

Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\sigma_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_1 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_2 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_3 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pochodne skalarów względem wektorów i wektorów względem skalarów

$x \in \mathcal{R}^n$ wektor, y skalar, wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Przykład $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $y = x_1 x_2 x_3$, policzyć

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial (x_1 x_2 x_3)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$y \in \mathcal{R}^n$ wektor, x skalar, wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x} \end{bmatrix}$

Przykład $y = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$, policzyć

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (x)}{\partial x} & \frac{\partial (x^2)}{\partial x} & \frac{\partial (x^3)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

Pochodne wektorów względem wektorów

$x \in \mathcal{R}^n, y \in \mathcal{R}^m$ to wektory

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Przykład $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_3^2 + 3x_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, policzyć

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_3^2 + 3x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(x_3^2 + 3x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(x_1^2 - x_2)}{\partial x_3} & \frac{\partial(x_3^2 + 3x_2)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2x_3 \end{bmatrix}$$

Jakobian

$x, y \in \mathcal{R}^n$ to wektory tego samego rozmiaru, wówczas możemy policzyć Jakobian odwzorowania y

$$Jac(y) = det(\frac{\partial y}{\partial x}) = | \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} |$$

Przykład $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1^2 + 3x_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, policzyć

$Jac(y) = det(\frac{\partial y}{\partial x}) =$

$$| \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} \frac{\partial (x_1^2 - x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial (x_1^2 + 3x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (x_1^2 - x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial (x_1^2 + 3x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} | = 6x_1 + 1$$

Własności 1/2

1)$y = x^T A x$

wówczas

$\frac{\partial y}{\partial x} = Ax + A^T x$

Jeśli A jest symetryczna, czyli $A = A^T$, wówczas

$\frac{\partial y}{\partial x} = Ax + A^T x = 2Ax$

Ponadto

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = 2A^T$

Jeśli A jest symetryczna, czyli $A = A^T$, wówczas

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = 2A$

Własności 2/2

2) $y = Ax$ wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = A^T$

Jeśli A jest symetryczna, czyli $A = A^T$, wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = A$

3) $y = x^T A$ wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = A$

4) $y = x^T x$ wówczas $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x$

5)$x \in \mathcal{R}^n$ wektor, $y \in \mathcal{R}^r$ wektor, $z \in \mathcal{R}^m$ wektor, oraz $z = y(x)$ wówczas $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}$