QR faktoryzacja macierzy na dwa sposoby

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Zadanie na dzisiaj

Proszę rozwiązać układ równań

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = b$$

1) QR faktoryzacją z macierzą obrotów (slajd 8)
2) QR faktoryzacja z ortogonalizacją Gramma-Schmidta (slajd 21-23)
2) QR faktoryzacja z macierzą odbić (slajd 31)

Iloczyn skalarny

$$<x,y>=x^Ty=y^Tx=\sum_{i=1,\ldots,n} x_i y_i$$

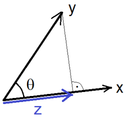
$$<x,y>=<y,x>$$

$$<\alpha_1 x_1+\alpha+2x_2,y>=\alpha_1<x_1,y>+\alpha_2<x_2,y>$$

$$<x,\beta_1 y_1+\beta+2y_2>=\beta_1<x,y_1>+\beta_2<x,y_2>$$

$$<x,x>\geq 0, \quad <x,x>=0 \quad <=> \quad x=0$$

$$\|x\|_2=\sqrt{<x,x>}$$



W przestrzeni Euklidesowej $<x,y>=\|x\|_2\|y\|_2 cos(\theta)$

Obliczanie rzutu $cos(\theta)=\frac{\|z\|}{\|y\|}$, stąd $\|z\|=cos(\theta)\|y\|$.

Wektor z jest w kierunku $\frac{x}{\|x\|}$ czyli $z=\|z\|\frac{x}{\|x\|}=cos(\theta)\|y\|\frac{x}{\|x\|}$

Skoro $cos(\theta)=\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$ mamy $z=\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}\|y\|\frac{x}{\|x\|}=\frac{<x,y>}{\|x\|^2}x$

Macierz ortogonalna

$$Q^T = Q^{-1}$$
$$Q^T Q = I$$
$$QQ^T = I$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = A^T$$

Q ortogonalne, wówczas

$$< Qx, Qy >=< x, y >$$

(dowód: $< Qx, Qy >= (Qy)^T Qx = y^T Q^T Qx = y^T x =< x, y >$)

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

czyli macierze ortogonale zachowują odległości i kąty

Obroty za pomocą specjalnych macierzy ortogonalnych

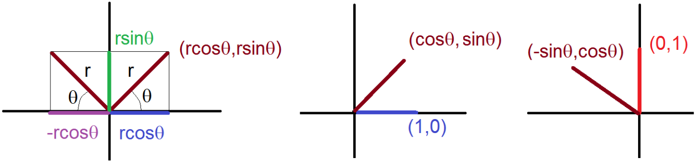


Figure: Obroty wektora o kąt θ

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Qx = \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Qy = \begin{bmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{bmatrix}$$

czyli macierz obrotów o kąt θ (lub c, s takie że $c^2 + s^2 = 1$)

$$Q = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

Macierz ortogonalna a obroty w 2D

Używając macierzy obrotu Q da się tak obrócić wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ żeby był prostopadły do osi OX_1, czyli miał zerową drugą współrzędną $Q^T x = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jakie dobrać c, s żeby to się udało (żeby wyzerować drugą współrzędną x)?

$$Q^T x = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 + sx_2 \\ -sx_1 + cx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 + sx_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chcemy więc $-sx_1 + cx_2 = 0$. Drugi warunek to $c^2 + s^2 = 1$.
Musimy rozwiązać układ równań: dane x_1, x_2 szukane c, s takie że:

$$sx_1 = cx_2 \quad x_1^2 s^2 - c^2 x_2^2 = 0$$

$$c^2 + s^2 = 1$$

Macierz ortogonalna a obroty w 2D

$$\begin{aligned} x_1^2 s^2 - c^2 x_2^2 &= 0 \\ c^2 + s^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$s^2 = \frac{|\begin{bmatrix} 0 & -x_2^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}|}{|\begin{bmatrix} x_1^2 & -x_2^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}|} = \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$c^2 = \frac{|\begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}|}{|\begin{bmatrix} x_1^2 & -x_2^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}|} = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \qquad c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

QR faktoryzacja za pomocą obrotów

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix} = b$$

Szukam Q takiego żeby wyzerowac x_2 w $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

QR faktoryzacja za pomocą obrotów

$$Q = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Q^T = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = QR$ czyli $R = Q^T A =$ (bo macierz ortogonalna $Q^{-1} = Q^T$)

$$= \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2*2+5*5 & 2*3+5*7 \\ (-5)*2+2*5 & (-5)*3+2*7 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaliśmy QR faktoryzację A

$$A = QR = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania $Ax = b$ z pomocą QR faktoryzacji
$Ax = b$, mamy $A = QR$
Przemnażamy przez Q^T i dostajemy $Q^T Ax = Q^T b = y$,
ale $R = Q^T A$ czyli $Rx = y$

$$y = Q^T b = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 * 12 + 5 * 29 \\ -5 * 12 + 2 * 29 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 169 \\ -2 \end{bmatrix}$$

oraz $Rx = y$

$$\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 169 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 29 & 41 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 169 \\ -2 \end{bmatrix}$$

stąd $-x_2 = -2$ czyli $x_2 = 2$
$29x_1 + 41 * x_2 = 169$ czyli $29x_1 = 169 - 41 * 2 = 169 - 82 = 87$
czyli $x_1 = 87/29 = 3$

Macierz ortogonalna a obroty

Macierz obrotu na płaszczyźnie OXY, $y = Qx$, $x, y \in \mathcal{R}^2$

$$Q = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

Macierz obrotu w płaszczyźnie OX_iX_j, , $y = Q_{ij}x$, $x, y \in \mathcal{R}^n$
(Q w wierszach i-tym, j-tym i kolumnie i-tej, j-tej)

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & c & & \cdots & -s & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \dots & & & & \\ & & & s & & \cdots & c & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości c, s są obliczane tak samo jak w przypadku 2D

QR faktoryzacja macierzy przez obroty

$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$
$A = QR$
$Q = Q_{21} Q_{31} .. Q_{n1} Q_{32} Q_{33} .. Q_{n2} ... Q_{nn-1}$
$R = Q_{nn-1}^T .. Q_{n2}^T ... Q_{33}^T Q_{32}^T Q_{n1}^T ... Q_{31}^T Q_{21}^T A$

Otwarty problem naukowy 1/2

Tadeusz Banachiewicz wprowadził "Krakowiany" które umożliwiały tańsze wykonywanie obrotów podczas obliczeń pozycji obiektów astronomicznych.
https://www.jacquesvallee.net/wp-content/uploads/2018/11 The_Strange_Case_of_the_Cracovian_Operat-1.pdf
Czy da się zaprojektować i zaimplementować *QR* faktoryzacje używającą "Krakowianów" tak żeby ilość operacji zmiennoprzecinkowych była tańsza?
(rozwiązanie grozi doktoratem)

Otwarty problem naukowy 2/2

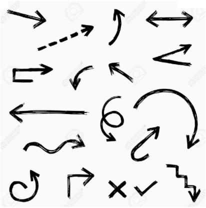
Temat ten znajduję się pomiędzy wykładami z Rachunku macierzowego oraz z moimi wykładami z otwartych podręczników AGH “Klasyczna i izogeometryczna metoda elementów skończonych” rozdział adaptacyjna projekcja bitmap.

Bitmape zmieniamy na $B = USV'$ gdzie U to macierz wektorów kolumn, V' to macierz transponowana wektorów wierszy S to macierz przekątniowa z wartościami własnymi W S zerujemy małe wartości własne (mniejsze od zadanego ϵ), i ignorujemy kolumny z U i wiersze z V które im odpowiadają. Wówczas dostajemy $U \to A$, $S \to R$, $V' \to B'$ po przemnożeniu ARB' dostaje przybliżenie bitmapy.

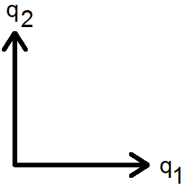
Jak to działa dla całych bitmap to jest napisane tutaj:
https://stackoverflow.com/questions/13614886/using-svd-to-compress-an-image-in-matlab/40046525
lub tutaj
http://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/
Nowa idea polega na pomieszaniu adaptacyjnej projekcji bitmap z algorytmem SVD (rozwiązanie grozi doktoratem)

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta = porządkowanie wektorów

Zbiór dowolnych wektorów $v_1, \ldots, v_n$



Naszym celem jest zastąpienie tego zbioru wektorów, innym zbiorem $q_1, \ldots, q_m$ który rozpinał będzie taką samą przestrzeń wektrową, ale wszystkie te wektory będą ortogonalne



Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Dane

$$v_1, ..., v_n \quad \rightarrow \quad S = span\{v_1, ..., v_n\}$$

$$\forall v \in S : v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta znajduje

$$q_1, ..., q_n$$

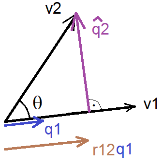
takie że

$$\begin{aligned} span\{q_1\} &= span\{v_1\} \\ span\{q_1, q_2\} &= span\{v_1, v_2\} \\ &... \\ span\{q_1, ..., q_n\} &= span\{v_1, ..., v_n\} \end{aligned}$$

oraz wektory $q_1, ..., q_n$ są ortogonalne, czyli $< q_i, q_j >= 0$ dla $i \neq j$. Ortonormalizacja dodatkowo zakłada że wektory $q_1, ..., q_n$ mają długość 1, $\|q_i\| = 1$.

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Mamy dwa wektory v_1, v_2 które chcemy zortogonalizować.



Długość pierwszego wektora $r_{11} = \|v_1\|_2$.
Skalujemy wektor v_1 żeby miał długość =1 (wersor) $q_1 = \frac{v_1}{r_{11}}$
r_{12} to tyle o ile trzeba przedłużyć v_1, żeby wylądował na projekcji v_2
Innymi słowy $q_1 r_{12}$ to projekcja v_2 na v_1 (wzór z początku wykładu)

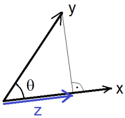
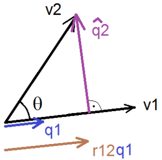


Figure: Projekcja $z = \frac{<x,y>}{\|x\|^2} x$

czyli $(x = q_1, y = v_2)$ mamy $r_{12} = \frac{<q_1,v_2>}{q_1,q_1}$

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta

Mamy więc $r_{11} = \|v_1\|_2$, oraz $q_1 = \frac{v_1}{r_{11}}$.



Teraz, $r_{12} = \frac{<q_1, v_2>}{<q_1, q_1>}$.
Widzimy że $r_{12}q_1$ to rzut v_2 na v_1. Mamy $r_{12}q_1 + \hat{q}_2 = v_2$, czyli drugi wektor ortogonalny to $\hat{q}_2 = v_2 - r_{12}q_1$.
r_{22} to długość $\hat{q}_2$, czyli $r_{22} = \|\hat{q}_2\|^2$.
Skalujemy wektor $\hat{q}_2$ żeby miał długość =1 (wersor) $q_2 = \frac{\hat{q}_2}{r_{22}}$

Krok $1 \to 2$

Szukam v_1, v_2 takich że $span\{v_1, v_2\} = span\{q_1, q_2\}$, oraz $v_2 \perp v_1$ czyli $< v_1, v_2 >= 0$, oraz długość $\|q_1\| = \|q_2\| = 1 =< q_1, q_1 >=< q_2, q_2 >$.

$$r_{11} = \|v_1\|_2 \tag{1}$$

$$q_1 = \frac{v_1}{r_{11}} \tag{2}$$

$$r_{12} =< q_1, v_2 > \tag{3}$$

$$\hat{q}_2 = v_2 - r_{12} q_1 \tag{4}$$

$$r_{22} =< \hat{q}_2, \hat{q}_2 > \tag{5}$$

$$q_2 = \frac{\hat{q}_2}{r_{22}} \tag{6}$$

Krok $k-1 \to k$
Mamy $span\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}\} = span\{q_1, q_2, ..., q_{k-1}\}$ oraz $< q_i, q_j >= 0$ dla $i \neq j$, oraz $< q_i, q_i >= 1$.
chemy znaleźć q_k takie że
$span\{v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k\} = span\{q_1, q_2, ..., q_{k-1}, q_k\}$

$$\hat{q}_2 = v_2 - r_{12} q_1, \quad r_{12} =< q_1, v_2 >$$

$$\hat{q}_k = v_k - \sum_{j=1,...,k-1} r_{jk} q_j, \quad r_{jk} =< q_j, v_k > \tag{7}$$

$$q_2 = \frac{\hat{q}_2}{r_{22}}$$

$$q_k = \frac{\hat{q}_k}{r_{kk}} \tag{8}$$

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta - Przykład

Mamy dwa wektory $v_1 = (2,1)$ oraz $v_2 = (1,2)$.
Proszę je zortogonalizować.

$r_{11} = \|v_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$q_1 = \frac{v_1}{r_{11}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

$r_{12} =< q_1, v_2 >= \frac{1}{\sqrt{5}} < (2,1),(1,2) >= \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\cdot(1,2) =$
$(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\hat{q}_2 = v_2 - q_1 r_{12} = (1,2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\frac{4}{\sqrt{5}} = (1 - \frac{8}{5}, 2 - \frac{4}{5}) = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$

$r_{22} = \|\hat{q}_2\|_2 = \sqrt{\frac{-3}{5}^2 + \frac{6}{5}^2} = \sqrt{\frac{9+36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$q_2 = \frac{\hat{q}_2}{r_{22}} = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5})\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$

Dostaliśmy $q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$

Sprawdzenie

$< q_1, q_2 >= q_1 \cdot q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \frac{1}{5}(-2+2) = 0$

$\|q_1\|_2 = \sqrt{\frac{1^2}{\sqrt{5}^2}2^2 + \frac{1^2}{\sqrt{55}^2}1^2} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$

$\|q_2\|_2 = \sqrt{\frac{1^2}{\sqrt{5}^2}(-1)^2 + \frac{1^2}{\sqrt{55}^2}2^2} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$ OK

Ortogonalizacja Gramma-Schmidta = QR

$$
\begin{aligned}
v_1 &= q_1 r_{11} \\
v_2 &= q_1 r_{12} + q_2 r_{22} \\
v_3 &= q_1 r_{13} + q_2 r_{23} + q_3 r_{33} \\
&\vdots \\
v_n &= q_1 r_{1n} + q_2 r_{2n} + \cdots + q_n r_{nn}
\end{aligned}
$$

Co odpowiada $V = QR$

$$
\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}
$$

gdzie $V, Q, R \in \mathcal{R}^{n \times n}$, czyli v_i, q_i to wektory z $\mathcal{R}^n$
oraz $r_{11} = \|v_1\|_2$, $r_{kk} = \|q_k\|_2$, $r_{ik} =< q_i, v_k >$

Dla wektorów $v_1 = (2,1)$ oraz $v_2 = (1,2)$
policzyliśmy $q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.
Przy okazji policzyliśmy
$r_{11} = \|v_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$r_{12} =< q_1, v_2 >= \frac{1}{\sqrt{5}} < (2,1),(1,2) >= (\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{\sqrt{5}}$
$r_{22} = \|\hat{q}_2\|_2 = \sqrt{\frac{-3}{5}^2 + \frac{6}{5}^2} = \sqrt{\frac{9+36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$
Mamy więc

$$V = QR \qquad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} * \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} * 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} * \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} * \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} * \sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} * 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} * \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} * \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{8-3}{5} \\ 1 & \frac{4+6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz ortogonalna a odbicia wektorów w 2D

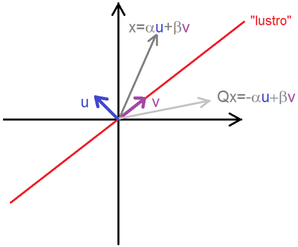
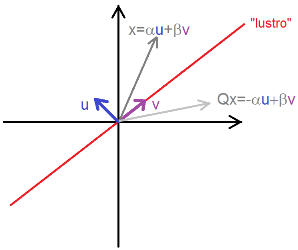


Figure: Odbicie wektora x poprzez linię przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ prostopadłą do wersora u i równoległą do wersora v, reprezentowane przez macierz Q.

Szukamy Q takiej macierzy która będzie reprezentowała to odbicie

$$Qu = -u, \qquad Qv = v$$

Macierz ortogonalna a odbicia wektorów w 2D



Macierz operatora odbicia względem linii rozpiętej przez u i v definiujemy tak żeby "odijała" ona u na $-u$ oraz v na v.

$$Qu = I - 2uu^T$$

Mamy $Qu = (I - 2uu^T)u = u - 2u(u^T u) = u - 2u * 1 = -u$, czyli odbija ona u na $-u$

Ponadto $Qv = (I - 2uu^T)v = v - 2u(u^T v) = v - 2u * 0 = v$ czyli odbija ona v na v.

Własności macierzy odbicia

$$Qu = I - 2uu^T$$

$$\text{Symetryczna } Q^T = Q$$

Dowód:
$(I - 2uu^T) = I^T + 2(uu^T)^T = I - 2(u^T)^T u^T = I - 2uu^T = Q$

$$\text{Ortogonalna } Q^{-1} = Q^T$$

Dowód: $Q^{-1}Q = I$ czyli
$(I - 2uu^T)(I - 2uu^T) = I^2 - 2uu^T I - 2uu^T I + 4uu^T(uu^T) =$
$I - 4uu^T + 4u(u^T u)u^T = I - 4uu^T + 4u * 1 * u^T = I - 4uu^T + 4uu^T = I$

$$\text{Inwolucja } Q^{-1} = Q$$

Dowód: $Q^{-1} = \text{(ortogonalność)} = Q^T = \text{(symetria)} = Q$

Operator projekcji i jego własności

Definiujemy operator projekcji $P = uu^T$ który przenosi u w u $(Pu = u)$ oraz v w zero $Pv = 0$

$$Pu = (uu^T)u = u(u^T u) = u\|u\|_2^2 = u * 1 = u$$
$$Pv = (uu^T)v = u(u^T v) = u * 0 = 0$$

Własności

$$P^2 = P$$

Dowód: $P^2 = (uu^T)uu^T = u(u^T u)u^T = u * 1 * u^T = uu^T = P$

$$P^T = P$$

Dowód: $P^T = (uu^T)^T = (u^T)(u^T)^T = u^T u = uu^T = P$

Twierdzenie o odbiciach

Każdy wektor y jest odbiciem jakiegoś wektora x przez operację odbicia $Q = I - \gamma u u^T$.

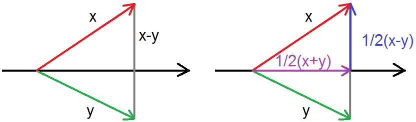


Figure: Dla danego wektora y wybieramy dowolny wektor x i tworzymy wektor defniujacy linię $\frac{1}{2}(x+y)$ oraz wektor prostopadły $\frac{1}{2}(x-y)$.

Dowód: Wektor linii odbicia to $v = \frac{1}{2}(x+y)$ a wersor linii odbicia to $\frac{v}{\|v\|_2}$. Wektor prostopadły do linii odbicia to $\hat{u} = \frac{1}{2}(x-y)$

$$Q = I - 2\hat{u}\hat{u}^T = I - 2\hat{u}/\|\hat{u}\|_2\hat{u}^T/\|\hat{u}\|_2 =$$

$$I - 2\frac{1}{2}(x-y)(\frac{1}{2}(x-y))^T/(\frac{1}{2}\|x-y\|_2\frac{1}{2}\|x-y\|_2) =$$

$$I - 2(x-y)(x-y)^T/(\|x-y\|_2^2) = I - 2uu^T/(\|u\|_2^2) = I - \gamma u u^T$$

gdzie $u = x - y$ oraz $\gamma = 2/\|u\|_2$

Macierz ortogonalna odbicia a faktoryzacja

Dla wektora x szukamy operatora ortogonalnego odbicia Q żeby

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Qx = -\begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y; \quad x - y = \begin{bmatrix} x_1 - \tau \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie $\tau = \|x\|_2$. Mamy $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Weźmy $x/(x_1 - \tau)$ oraz $y/(x_1 - \tau)$. Wówczas $u = \frac{x-y}{x_1+\tau}$ ma 1 na pierwszym polu, i

$$Q = I - \gamma u u^T; \qquad u = \frac{x - y}{x_1 + \tau} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2/(x_1 - \tau) \\ \vdots \\ x_n/(x_1 - \tau) \end{bmatrix}; \qquad \gamma = \frac{2}{\|u\|_2} = \frac{x_1 + \tau}{\tau}$$

Dowód: $\|u\|_2^2 = 1 + x_2^2/(x_1+\tau)^2 + \ldots + +x_n^2/(x_1+\tau)^2 = (1 = \frac{(x_1+\tau)^2}{(x_1+\tau)^2}) =$

$$\frac{(x_1+\tau)^2 + x_2^2 + \ldots + +x_n^2}{(x_1+\tau)^2} = \frac{\tau^2 + 2\tau x_1 + \|x\|_2}{(x_1+\tau)^2} = (\tau^2 = \|x\|_2^2) =$$

$$\frac{2\tau^2 + 2\tau x_1}{(x_1+\tau)^2} = \frac{2\tau(\tau + x_1)}{(x_1+\tau)^2} = \frac{2\tau}{(x_1+\tau)}.$$ Dodatkowo $Qx = y$

Ortogonalizacja QR przez “odbicia” - Przykład

$$A = QR \implies R = Q^T A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\tau = \|x\|_2$ więc $\tau = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, oraz $x_1 = 1$. Mamy $\gamma = \frac{x_1+\tau}{\tau} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Wówczas

$$y = Qx = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{x-y}{x_1+\tau} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Obliczamy $Q = I - \gamma u u^T$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

Ortogonalizacja QR przez "odbicia" - Przykład

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1*1 & 1*\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}*1 & \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}+2-1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

$$Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ortogonalizacja QR przez "odbicia" - Przykład

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 * 1 - 1 * 1 & -1 * 2 - 1 * 3 \\ -1 * 1 + 1 * 1 & -1 * 2 + 1 * 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie

$$QR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)(-2) - 1 * 0 & (-1)(-5) - 1 * 1 \\ (-1)(-2) + 1 * 0 & (-1)(-5) + 1 * 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

OK

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = QR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$QRx = b \implies (2)\; Rx = y \qquad (1)\; Qy = b$$

$$(Ad.1) \quad y = Q^{-1} b \implies y = Q^T b \text{ (Q ortogonalne)}$$

$$y = Q^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 * 1 - 1 * 2 \\ -1 * 1 + 1 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(Ad.2) \quad Rx = y \qquad \text{(R trójkątne górne)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 1; \quad -2x_1 - 5x_2 = -3; \quad 2x_1 = 3 - 5 * 1 = -2; \quad x_1 = -1$$

$$\text{Sprawdzenie: } Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * (-1) + 2 * 1 \\ 1 * (-1) + 3 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = b \text{ OK}$$

Krok 1) $A = Q_1 R_1$, $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad Q_1^T A = Q_1 A = \begin{bmatrix} -\tau_1 & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A}_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = R_1$$

W jaki sposób konstruuje Q_1 etc. ?

$Q_1 = I - \gamma u u^T$, gdzie $u = \frac{x-y}{x_1+\tau_1}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ to pierwsza

kolumna A, $y = \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tau_1 = \|x\|_2$, $\gamma = \frac{\tau_1 + x_1}{\tau_1}$.

Krok 2) $A_2 = Q_2 R_2$, $A_2 \in \mathcal{R}^{n\times n}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad Q_2^T A_2 = Q_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\tau_2 & \hat{a}_{23} & \cdots & \hat{a}_{2n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \hat{A}_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

W jaki sposób konstruuje Q_2 etc. ?

$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - \gamma u u^T \end{bmatrix}$, gdzie $u = \frac{x-y}{x_1+\tau_1}$, $x = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} \\ \vdots \\ \hat{a}_{n2} \end{bmatrix}$ to

druga kolumna A_2, $y = \begin{bmatrix} -\tau_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tau_2 = \|x\|_2$, $\gamma_2 = \frac{\tau_1 + x_2}{\tau_2}$.

itd.