Podstawowe własności rachunku operatorowego

Idea metody operatorowej polega na ***znalezieniu przekształcenia pozwalającego zastąpić równania różniczkowo - całkowe przez zwykłe równania algebraiczne***. Przekształcenie to można traktować jako prawo odpowiedniości między dwoma zbiorami funkcji:

$$f(t) \div F(s)$$

Podstawę rachunku operatorowego stanowi *przekształcenie (transformacja) Laplace'a*, określające związek między funkcjami czasu *f(t)* i odpowiadającymi im funkcjami *F(s)* nowej zmiennej zespolonej *s*.

Załóżmy funkcję f(t), która spełnia następujące warunki:

1. $f(t) \equiv 0$ dla $t < 0$,
2. ma w każdym skończonym przedziale wartość skończoną,
3. ma pochodną f'(t) w każdym skończonym przedziale,
4. istnieje zbiór liczb rzeczywistych c, dla których całka:

$$\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-ct} dt$$

jest absolutnie zbieżna (ściślej, całka ta jest zbieżna w półpłaszczyźnie Re(s) > c).

Wprowadzimy teraz nową *zmienną zespoloną* $\underline{s = c + j\omega}$.

Transformatą Laplace'a funkcji f(t) nazywać będziemy funkcję F(s) zmiennej zespolonej s, określoną wzorem:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad \text{lub} \qquad F(s) = L[f(t)]$$

Wzór powyższy przyporządkowuje funkcji zmiennej rzeczywistej f(t) funkcję zmiennej zespolonej F(s) i nosi nazwę prostego przekształcenia (transformacji) Laplace'a, a całka nazywana jest często całką Laplace'a. Funkcję f(t) nazywać będziemy ***oryginałem***, a funkcję F(s) ***transformatą***.

Możliwe jest również ***odwrotne przekształcenie Laplace'a*** (transformacja odwrotna), pozwalające określić funkcję f(t) odpowiadającą danej transformacie F(s).

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania równania całkowego. Ponieważ jest to czynność zazwyczaj pracochłonna, przy wyznaczaniu oryginału danej funkcji zmiennej zespolonej wykorzystuje się, o ile to możliwe, własności przekształcenia Laplace'a oraz tablice transformat.

Podstawowe własności i twierdzenia rachunku operatorowego opartego na transformacji Laplace'a

1. *Twierdzenia o liniowości*:

$$L[k \cdot f(t)] = k \cdot L[f(t)] \ ,$$

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$$

2. *Twierdzenie o transformacji pochodnych funkcji:*

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(0^+) - \ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$L[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0^+) - f'(0^+)$$

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

gdzie: $f(0^+)$ jest wartością początkową funkcji f(t) w punkcie $t = 0^+$ (prawostronna granica),
$f'(0^+)$ jest pochodną $f(0^+)$

3. *Twierdzenie o transformacji całki funkcji:*

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

4. *Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie zmiennej rzeczywistej:*

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} \cdot F(s)$$

5. *Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie zmiennej zespolonej:*

$$L[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s + a)$$

6. *Twierdzenie o zmianie skali:*

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7. *Twierdzenie o różniczkowaniu w dziedzinie zmiennej zespolonej:*

$$L[t \cdot f(t)] = (-1)\frac{dF(s)}{ds}$$

$$L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

8. *Twierdzenie o wartości końcowej:*

Jeżeli istnieje: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ i $L[f(t)] = F(s)$ to

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$$

9. *Twierdzenie o wartości początkowej:*

Jeżeli istnieje: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ i $L[f(t)] = F(s)$ to

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$$

10. *Twierdzenie o splocie:*

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)] \quad ,$$

gdzie: $f_1(t) * f_2(t)$ jest splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$.
Splot funkcji określa zależność:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$$

Rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą transformacji Laplace'a

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a daje prostą metodę rozwiązywania równań różniczkowych, polegającą na ich algebraizacji.

Niech dane będzie zwyczajne równanie różniczkowe ze stałymi współczynnikami:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t),$$

w którym f(t) jest znaną funkcją zmiennej rzeczywistej, oraz warunki początkowe.

Rozwiązując równanie należy:

1. poddać je przekształceniu Laplace'a z uwzględnieniem warunków początkowych,
2. wyznaczyć transformatę Y(s) szukanej funkcji,
3. doprowadzić tę transformatę do postaci

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad ,$$

4. wyznaczyć szukaną funkcję zmiennej rzeczywistej

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{L(s)}{M(s)}\right]$$

Transformaty Laplace'a najczęściej spotykanych funkcji:

Oryginał f(t)	Transformata F(s)
$\delta(t)$ - funkcja Diraca	1
1(t) - skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s \pm a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$