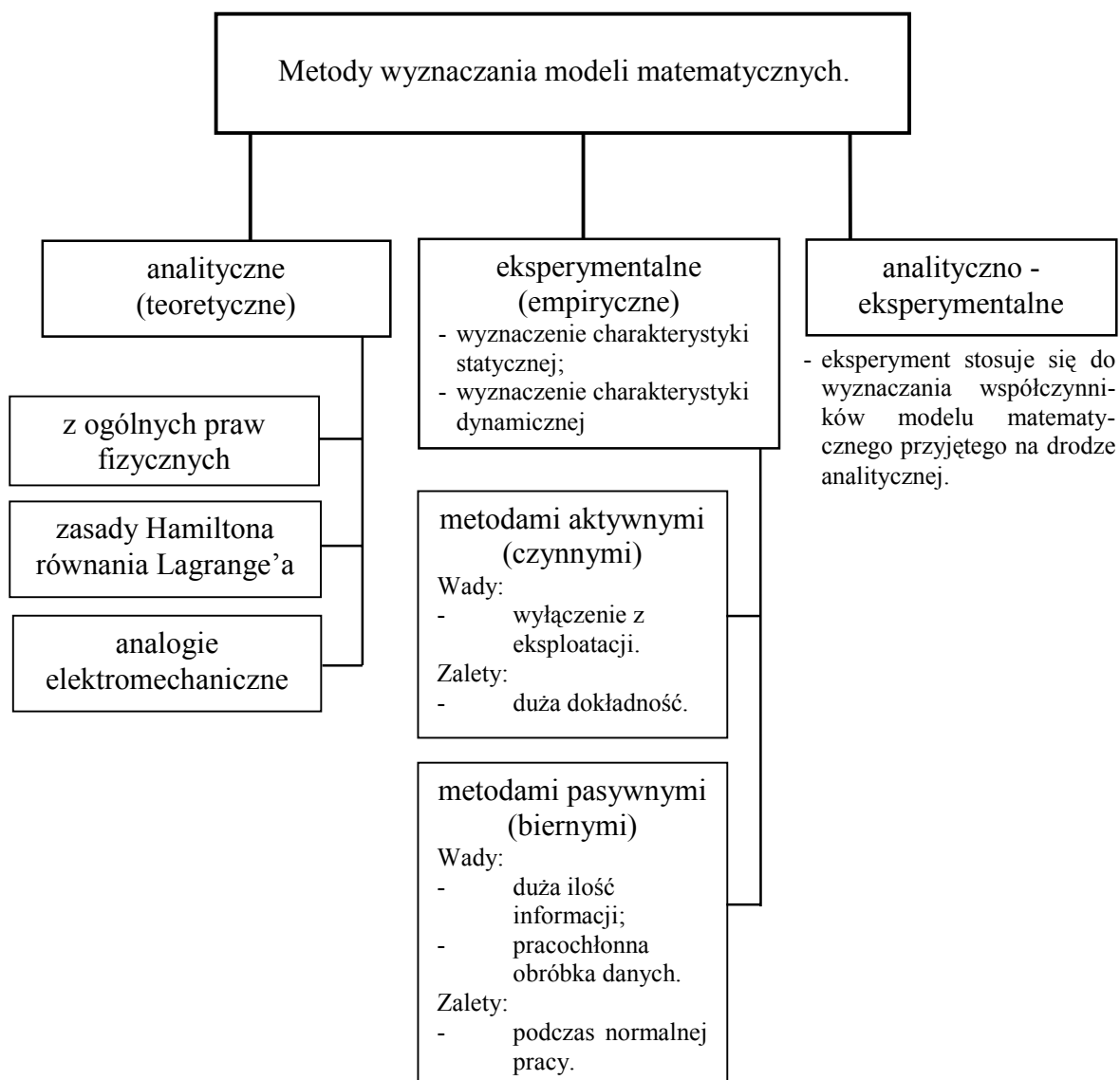


2. MODELE MATEMATYCZNE UKŁADÓW REGULACJI



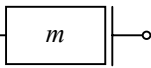
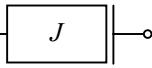
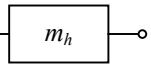

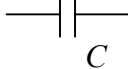
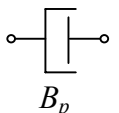
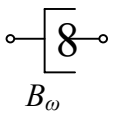
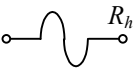
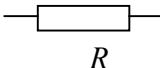
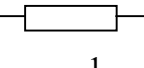

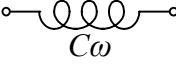
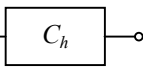
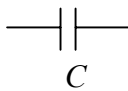
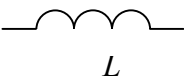
Rys. 2.1

Najczęściej stosowanymi modelami matematycznymi są:

- równania różniczkowe zwyczajne dla modeli ciągłych;
- równania różniczkowe cząstkowe dla układów, w których parametry obiektu zależą również od współrzędnych przestrzennych;
- równania różnicowe dla modeli dyskretnych;
- transmitancje (Laplace'a lub z) tylko dla obiektów liniowych;
- równania stanu.

2.1. Analogie elektromechaniczne

Tabela 2.1

	Człony mechaniczne			Człony elektryczne	
	Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Człony hydrauliczne	Analogia napięciowa	Analogia prądowa
				$U \rightarrow F$ lub $M$ $i \rightarrow v$ lub $\omega$	$i \rightarrow F$ lub $M$ $U \rightarrow v$ lub $\omega$
Inercja, bezwładność	$F = m \frac{dv}{dt}$  $F = mD\dot{x}$ $F = mDv$ $= mD^2x$	$M = J \frac{d\omega}{dt}$  $M = JD\dot{\phi}$ $M = JD\omega$ $= JD^2\phi$	Bezwładność  $\Delta p_m = m_h DQ$ $= m_h D^2 V_h$	$m$ lub $J \rightarrow L$  $U = LDi$ $U = L \frac{di}{dt}$	$m$ lub $J \rightarrow C$  $i = C \frac{dU}{dt}$
Tarcie wiskotyczne (proporcjonalne do v)	$F = B_p \cdot v$  $F = B_p \dot{x}$ $F = B_p \cdot Dx$	$M = B_\omega \cdot \omega$  $M = B_\omega \dot{\phi}$ $M = B_\omega \cdot D \cdot \phi$	Opory przepływowe  $\Delta p_r = R_h Q$ $= R_h DV_h$	$B_p$ lub $B_\omega \rightarrow R$  $U = i \cdot R$	$B_p$ lub $B_\omega \rightarrow \frac{1}{R}$  $i = \frac{1}{R} \cdot U$
Sprężystość	$F = \frac{v}{C_p} \cdot D$  $F = \frac{1}{C_p D} \dot{x}$ $F = \frac{v}{C_p} \cdot D^{-1}$ $= \frac{x}{C_p}$	$M = \frac{\omega}{C_\omega \cdot D}$  $F = \frac{1}{C_p D} \dot{\phi}$ $M = \frac{\omega}{C_\omega} \cdot D^{-1}$ $= \frac{\phi}{C_\omega}$	Pojemność hydrauliczna  $\Delta p_c = \frac{Q}{C_h D}$ $= \frac{V_h}{C_h}$	$C_p$ lub $C_\omega \rightarrow C$  $U = \frac{1}{C \cdot D} \cdot i$ $U = \frac{1}{C} \int i dt + U_0$	$C_p$ lub $C_\omega \rightarrow L$  $i = \frac{1}{L \cdot D} \cdot U$ $i = \frac{1}{L} \int U dt + I_0$

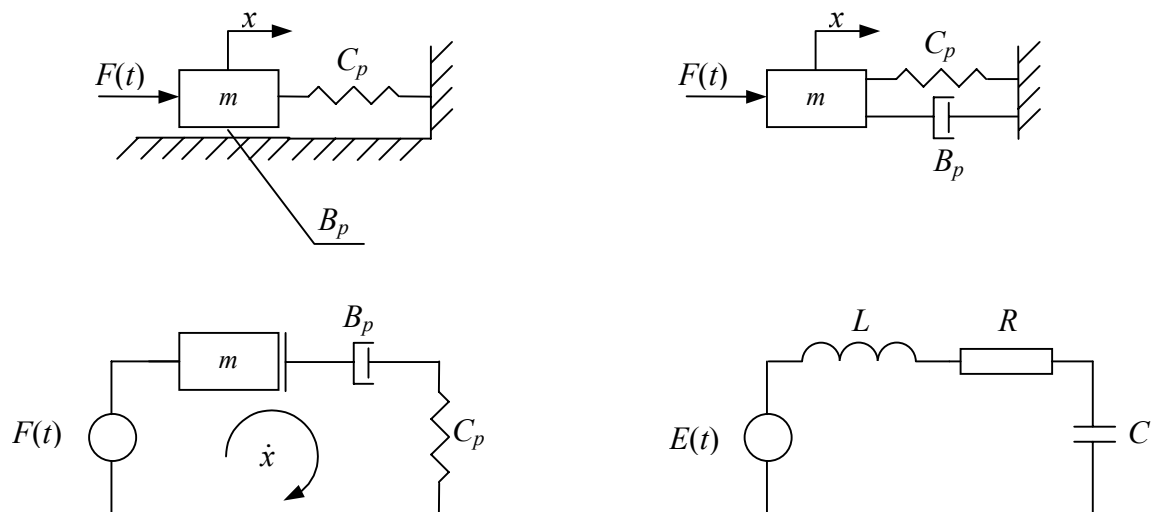
Obiekty zbudowane są z elementów zwanych w automatyce członami. Człony mogą być mechaniczne i elektryczne. Człony mechaniczne dotyczą ruchu postępowego i obrotowego, natomiast w członach elektrycznych występuje dualizm pomiędzy analogami (odpowiednikami) napięciowymi i analogami prądowymi.

Stosując metody prądów oczkowych w elektrotechnice wyznaczamy układ równań dla prądów w poszczególnych oczkach stosując zawsze prawoskrętny kierunek prądu. Podobnie dla układów mechanicznych konstruujemy układ równań dla poszczególnych prędkości w układzie.

## 2. Modele matematyczne układów regulacji

### Przykład 2.1

Zbudować model matematyczny układu i jego analog napięciowy.



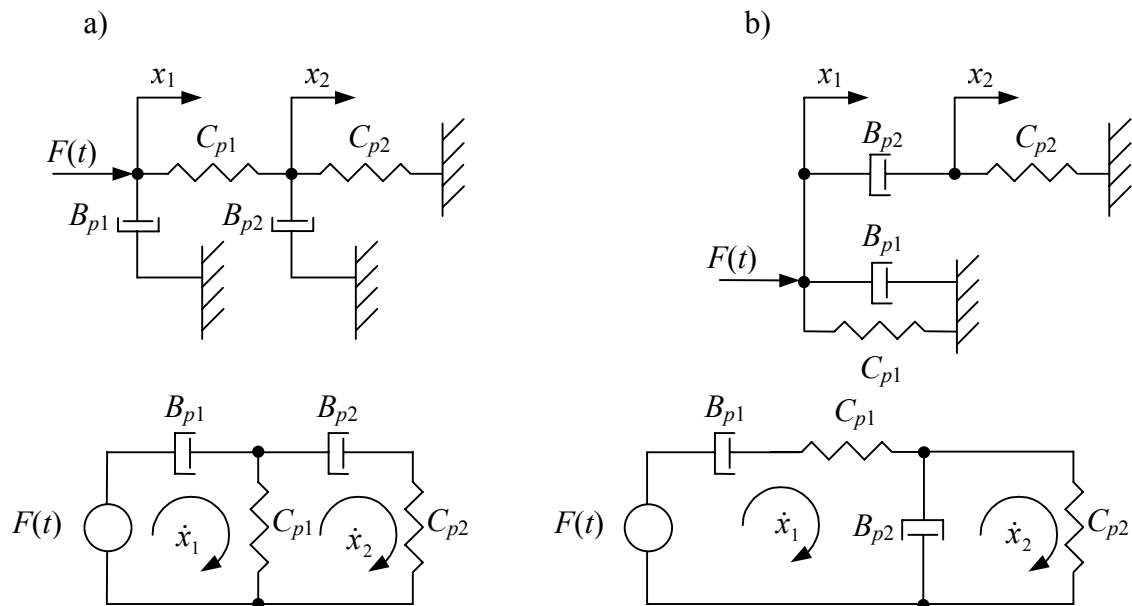
Rys. 2.1

$$F(t) = mD\dot{x} + B_p\dot{x} + \frac{1}{C_p}x$$

$$m \rightarrow L \quad B_p \rightarrow R \quad C_p \rightarrow C$$

### Przykład 2.2

Zbudować model matematyczny układu a) i b) oraz jego analog napięciowy.



Rys. 2.2

$$F(t) = \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + B_{p1}\dot{x}_1$$

$$0 = B_{p2}\dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p2}D}\dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$F(t) = B_{p1}\dot{x}_1 + B_{p2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{1}{C_{p1}D}\dot{x}_1$$

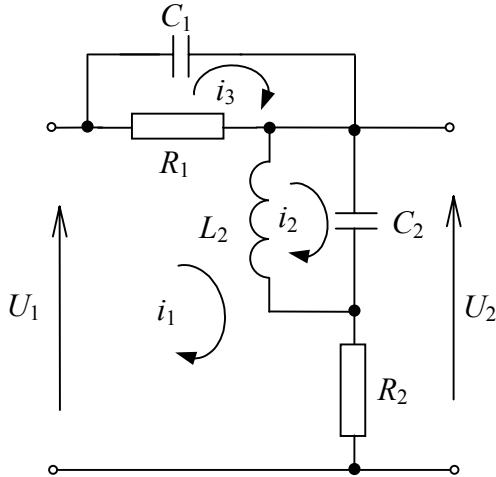
$$0 = B_{p2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{C_{p2}D}\dot{x}_2$$

## 2.2. Metoda prądów oczkowych (II prawo Kirchoffa)

Drugie prawo Kirchoffa (zwane też bilansem napięć w oczku) mówi, że w każdym zamkniętym obwodzie elektrycznym, zwanym oczkiem, suma algebraiczna napięć źródłowych  $E_i$  równa się sumie algebraicznej spadków napięć na impedancjach.

Przykład 2.3

Stosując metodę prądów oczkowych zbudować model matematyczny obwodu (rys.2.3.).



Rys. 2.3

$$U_1 = R_1 i_1 - R_1 i_3 + L_2 D i_1 - L_2 D i_2 + R_2 i_1$$

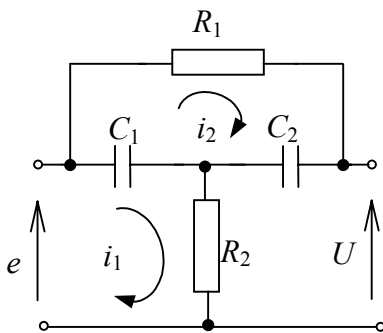
$$0 = \frac{1}{C_1 D} i_3 + R_1 i_3 - R_1 i_1$$

$$0 = \frac{1}{C_2 D} i_2 + L_2 D i_2 - L_2 D i_1$$

$$U_2 = \frac{1}{C_2 D} i_2 + R_2 i_1$$

Przykład 2.4

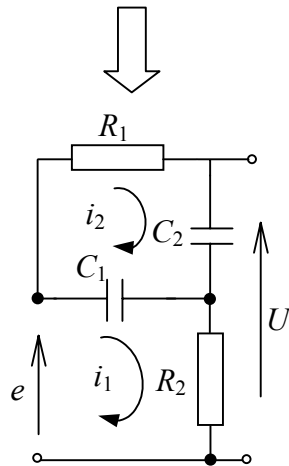
Stosując metodę prądów oczkowych wyznaczyć równanie wejść  $e = f(i_1)$  i wyjść  $U = f(i_1)$



$$e = R_2 i_1 + \frac{1}{C_1 D} (i_1 - i_2) \quad (1)$$

$$0 = R_1 i_2 + \frac{1}{C_2 D} i_2 + \frac{1}{C_1 D} (i_2 - i_1) \quad (2)$$

z równania (2) 
$$i_2 = \frac{\frac{1}{C_1 D} i_1}{R_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 D}}$$



Rys. 2.4

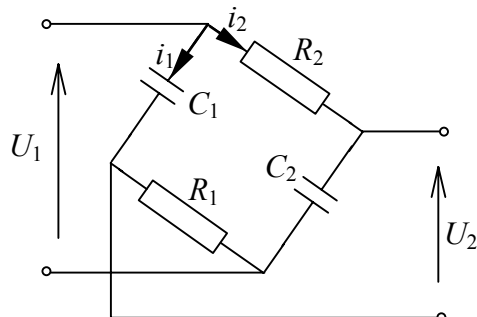
$$e = R_2 i_1 + \frac{1}{C_1 D} i_1 - \frac{\frac{1}{C_1^2 D^2}}{R_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 D}} i_1$$

$$U = \frac{1}{C_2 D} i_2 + R_2 i_1$$

$$U = \frac{1}{R_2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 D}} i_1 + R_2 i_1$$

Przykład 2.5

Zbudować model matematyczny i wyznaczyć transmitancję operatorową  $G(D)$  dla układu mostkowego RC jak na rysunku 2.5. Spadki napięć są zawsze przeciwne do kierunku przepływu prądu.



Rys. 2.5

$$U_1(D) = \frac{1}{C_1 D} i_1 + R_1 i_1 \rightarrow i_1 = \frac{U_1 C_1 D}{R_1 C_1 D + 1}$$

$$U_2(D) = \frac{1}{C_2 D} i_2 + R_2 i_2 \rightarrow i_2 = \frac{U_1 C_2 D}{R_2 C_2 D + 1}$$

$$U_2(D) = \frac{1}{C_2 D} i_2 - R_1 i_1$$

$i_1$  i  $i_2$  podstawiamy do równania  $U_2$

$$G(D) = \frac{U_2(D)}{U_1(D)} = \frac{1 - T_1 T_2 D^2}{(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)}$$

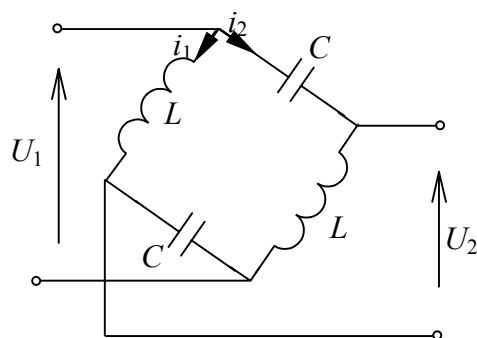
dla  $T_1 = T_2$

$$G(D) = \frac{1 - T^2 D^2}{1 + T^2 D^2} = \frac{(1 + TD)(1 - TD)}{(1 + TD)(1 + TD)} = \frac{1 - TD}{1 + TD}$$

$$T_1 = R_1 C_1 \quad , \quad T_2 = R_2 C_2$$

Przykład 2.6

Zbudować model matematyczny i wyznaczyć transmitancję operatorową dla układu rysunku 2.6.



Rys. 2.6

$$U_1 = \left( LD + \frac{1}{CD} \right) i_1$$

$$U_1 = \left( \frac{1}{CD} + LD \right) i_2$$

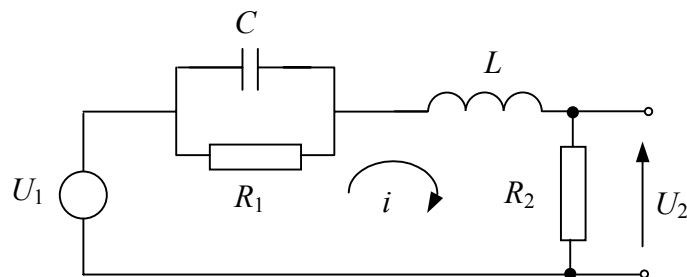
$$U_2 = LDi_1 - \frac{1}{CD} i_2$$

$$U_2 = \left( LD - \frac{1}{CD} \right) \frac{U_1 CD}{LCD^2 + 1} = \frac{LCD^2 - 1}{LCD^2 + 1} U_1$$

$$G(D) = \frac{T^2 D^2 - 1}{T^2 D^2 + 1} \quad \text{gdzie } T = \sqrt{LC}$$

Przykład 2.7

Zbudować model matematyczny  $U_2 = f(U_1)$ , zakładając że  $C$  i  $R_1$  to połączenie równoległe dwóch impedancji  $\frac{1}{CD}$  i  $R_1$ .



Rys. 2.7

$$U_1 = \left( \frac{1}{CD} R_1 + LD + R_2 \right) i$$

$$U_2 = R_2 i$$

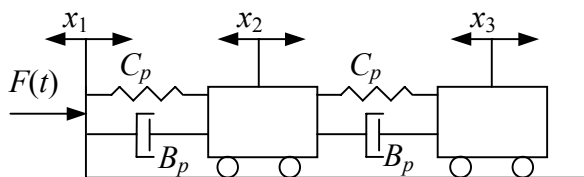
$$U_2 = R_2 \frac{U_1}{\frac{1}{CD} R_1 + LD + R_2} = \frac{R_2 U_1 \left( \frac{1}{CD} + R_1 \right)}{\frac{1}{CD} R_1 + \frac{LD}{CD} + LR_1 D + \frac{R_2}{CD} + R_1 R_2}$$

$$U_2 = \frac{CR_2 D + R_1 R_2 CD}{R_1 + LD + LCR_1 D + R_2 + R_1 R_2} U_1$$

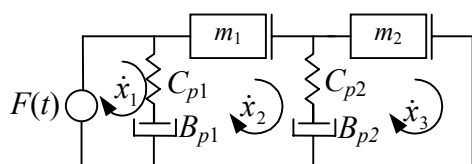
2.3. Modele matematyczne układów mechanicznych

Przykład 2.8

Zbudować model matematyczny obiektu pokazanego na rysunku 2.8.



$$F(t) = \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + B_{p1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$



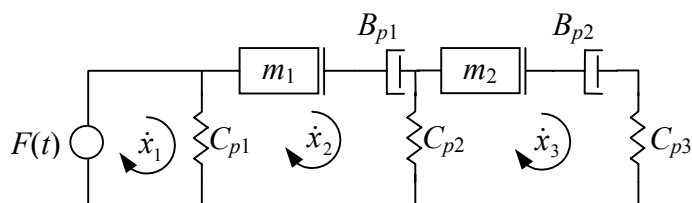
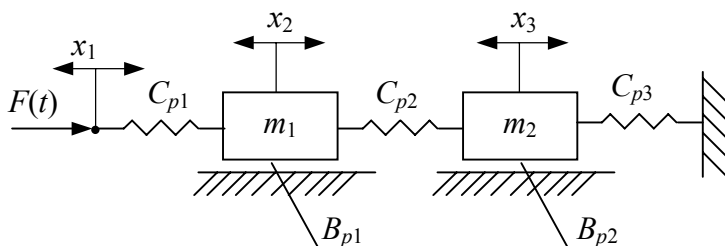
$$0 = m_1 D \dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{C_{p2}D}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + B_{p1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + B_{p2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$0 = m_2 D \dot{x}_3 + B_{p2}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \frac{1}{C_{p2}D}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

Rys. 2.8

Przykład 2.9

Zbudować model matematyczny obiektu pokazanego na rysunku 2.9.



Rys. 2.9

$$F(t) = \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$0 = m_1 D\dot{x}_2 + B_{p1}\dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p1}D}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{C_{p2}D}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

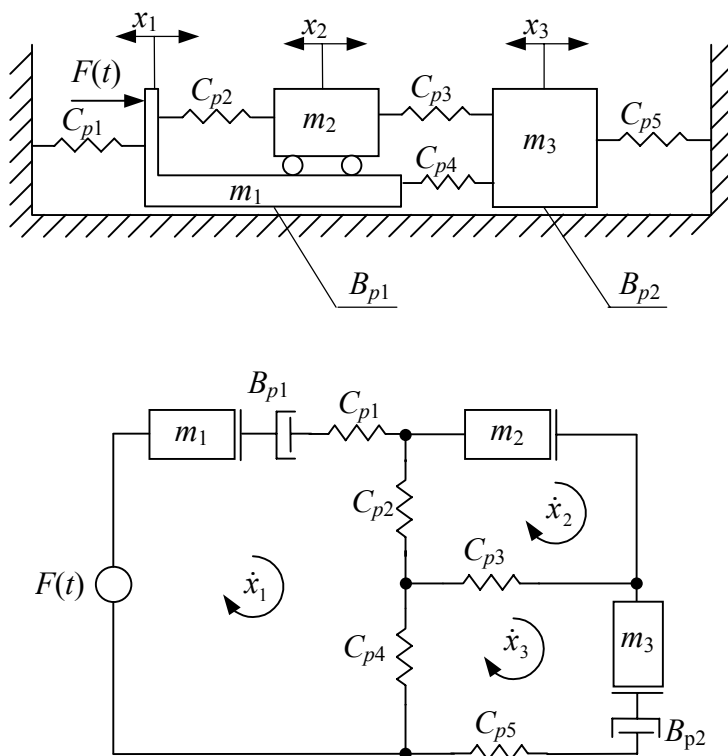
$$0 = m_2 D\dot{x}_3 + B_{p2}\dot{x}_3 + \frac{1}{C_{p3}D}\dot{x}_3 + \frac{1}{C_{p2}D}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

Powyższe równanie można również zapisać w postaci:

$$\begin{cases} \frac{1}{C_{p1}}(x_1 - x_2) = F \\ m_1\ddot{x}_2 + B_1\dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p1}}(x_2 - x_1) + \frac{1}{C_{p2}}(x_2 - x_3) = 0 \\ m_2\ddot{x}_3 + B_2\dot{x}_3 + \frac{1}{C_{p2}}(x_3 - x_2) + \frac{1}{C_{p3}}x_3 = 0 \end{cases}$$

Przykład 2.10

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.10.



Rys. 2.10



## 2. Modele matematyczne układów regulacji

$$F(t) = m_1 D \dot{x}_1 + B_{p1} \dot{x}_1 + \frac{1}{C_{p1} D} \dot{x}_1 + \frac{1}{C_{p2} D} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{1}{C_{p4} D} (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)$$

$$0 = m_2 D \dot{x}_2 + \frac{1}{C_{p2} D} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{C_{p3} D} (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$0 = \left( m_3 D + B_{p2} + \frac{1}{C_{p5} D} \right) \dot{x}_3 + \frac{1}{C_{p3} D} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \frac{1}{C_{p4} D} (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)$$

Powyższe równanie można również zapisać w postaci:

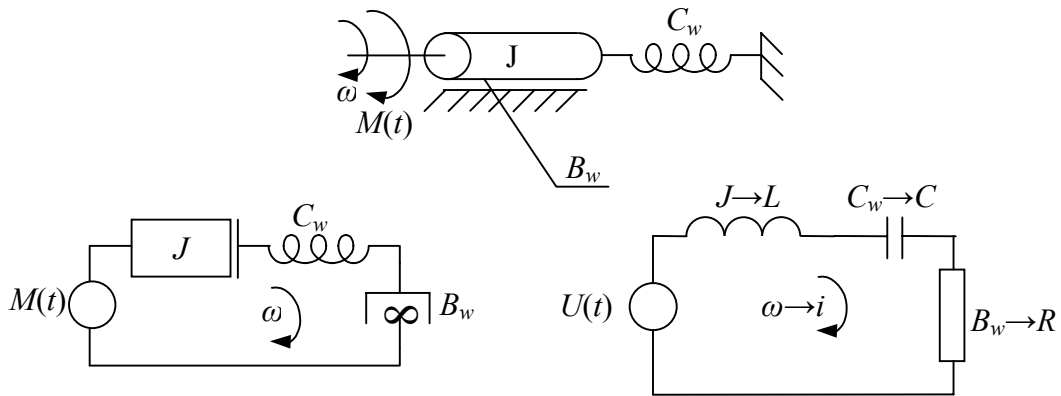
$$m_1 \ddot{x}_1 + B_{p1} \dot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_1 - x_3) + k_1 x_1 = F$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3(x_2 - x_3) + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + B_{p2} \dot{x}_3 + k_4(x_3 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) + k_5 x_3 = 0$$

Przykład 2.11

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.11.



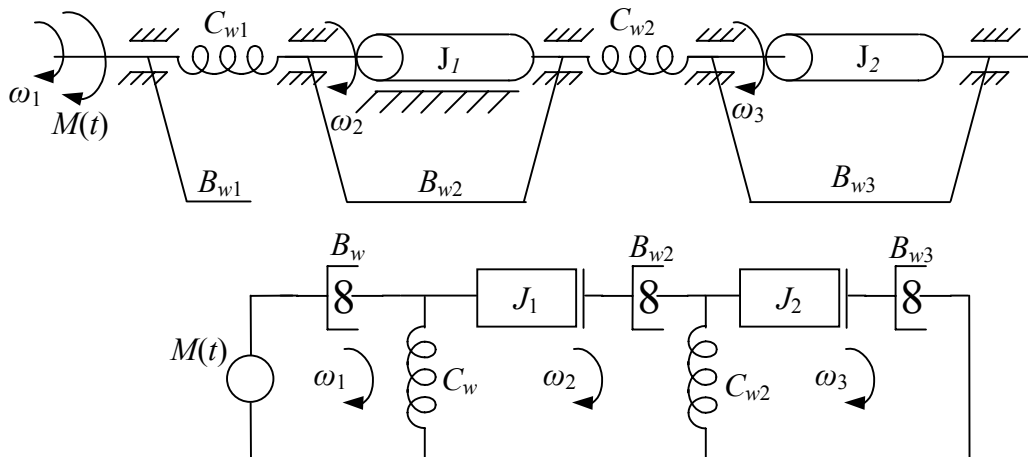
Rys. 2.11

$$M(t) = JD\omega + B_w \omega + \frac{1}{C_w D} \omega$$

$$U(t) = LDi + Ri + \frac{1}{CD} i$$

Przykład 2.12

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.12.



Rys. 2.12

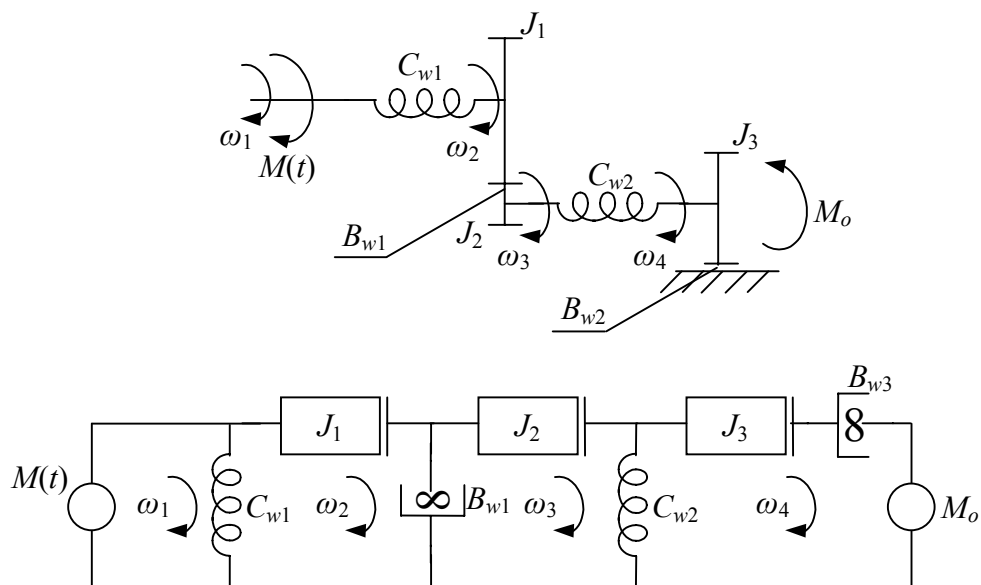
$$\left( B_{w1} + \frac{1}{C_{w1}D} \right) \omega_1 - \frac{1}{C_{w1}D} \omega_2 = M(t)$$

$$\left( J_1 D + B_{w2} + \frac{1}{C_{w1}D} + \frac{1}{C_{w2}D} \right) \omega_2 - \frac{1}{C_{w1}D} \omega_1 - \frac{1}{C_{w2}D} \omega_3 = 0$$

$$\left( J_2 D + B_{w3} + \frac{1}{C_{w2}D} \right) \omega_3 - \frac{1}{C_{w2}D} \omega_2 = 0$$

Przykład 2.13

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.13.



Rys. 2.13

$$M(t) = \frac{1}{C_{w1}D} (\omega_1 - \omega_2)$$

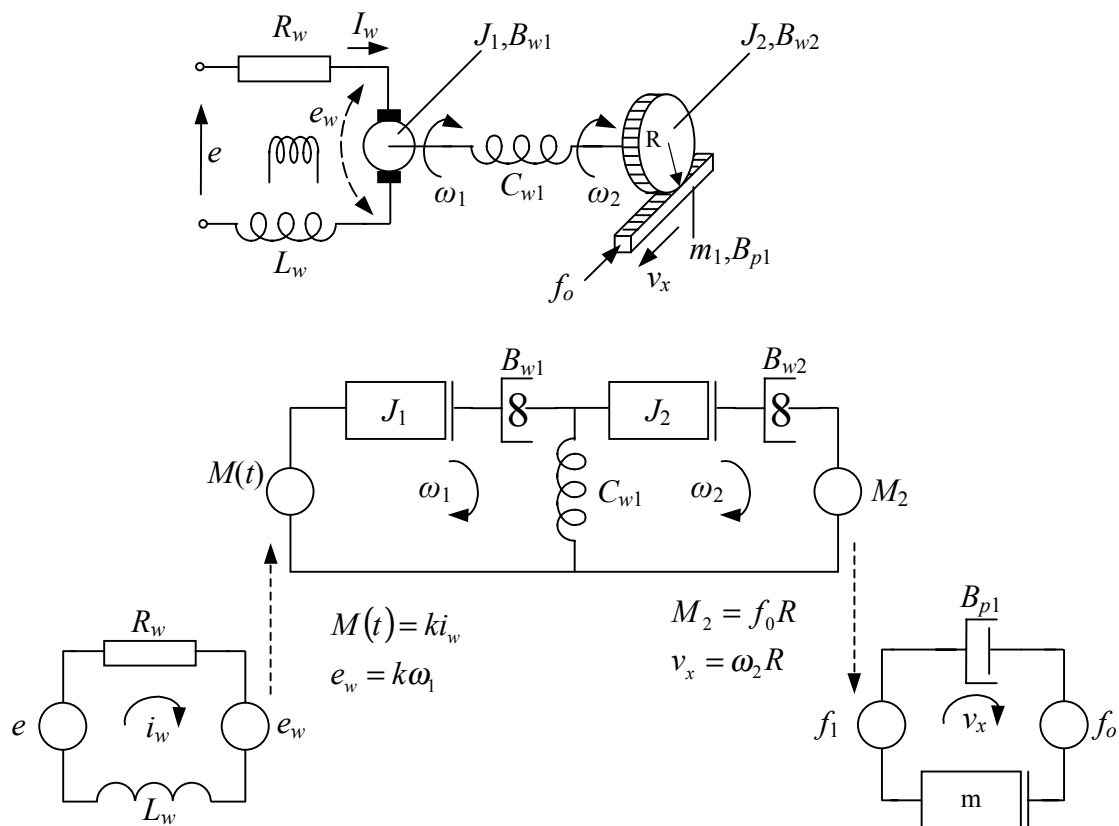
$$0 = \left( J_1 D + \frac{1}{C_{w1}D} + B_{w1} \right) \omega_2 - \frac{1}{C_{w1}D} \omega_1 - B_{w1} \omega_3$$

$$0 = B_{w1} (\omega_3 - \omega_2) + J_2 D \omega_3 + \frac{1}{C_{w2}D} (\omega_3 - \omega_4)$$

$$0 = (J_3 D + B_{w3}) \omega_4 + \frac{1}{C_{w2}D} (\omega_4 - \omega_3) + M_o$$

Przykład 2.14

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.14.



Rys. 2.14

$$\begin{aligned}
 (R_w + L_w D) i_w &= e - e_w \\
 \left( J_1 D + B_{w1} + \frac{1}{C_{w1} D} \right) \omega_1 - \frac{1}{C_{w1} D} \omega_2 &= M(t) \\
 -\frac{1}{C_{w1} D} \omega_1 + \left( J_2 D + B_{w2} + \frac{1}{C_{w1} D} \right) \omega_2 + M_2 &= 0 \\
 (m_1 D + B_{p1}) v_x + f_0 &= f_1
 \end{aligned}$$

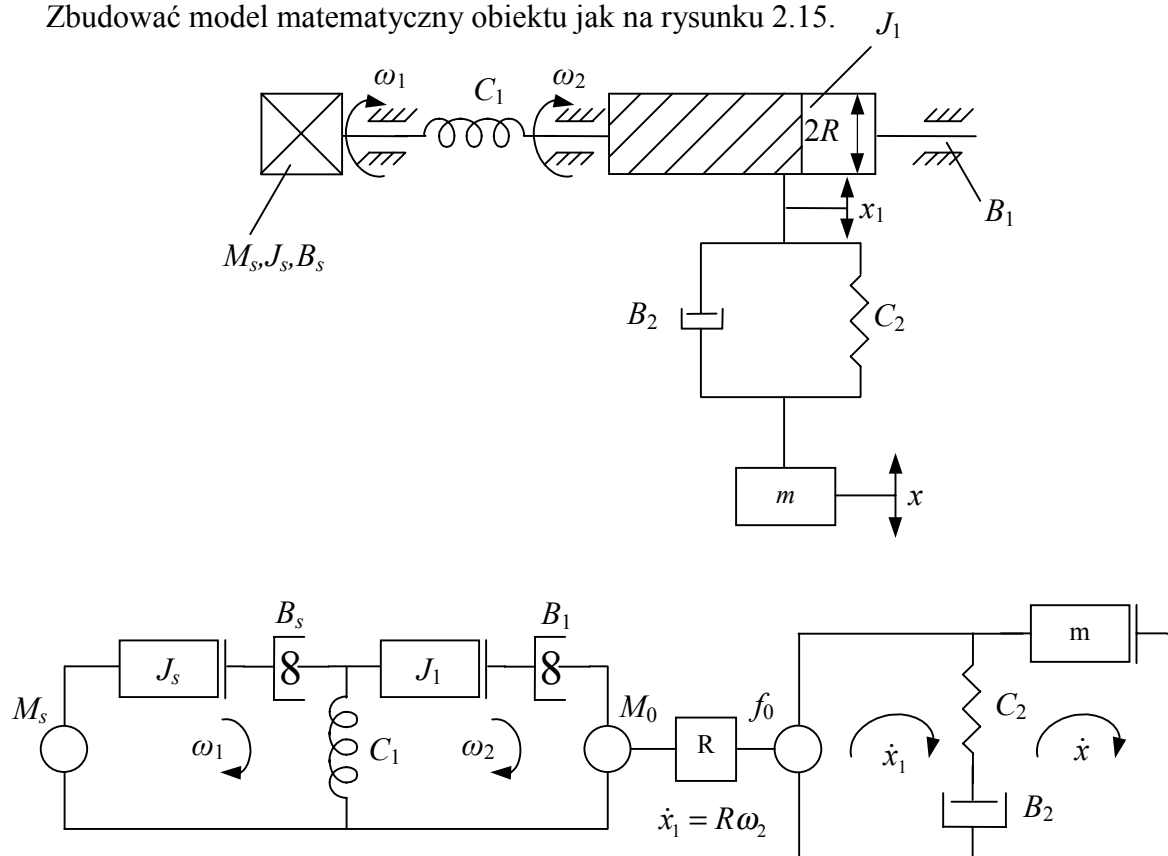
równania więzów:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= f_0 R \\
 v_x &= \omega_2 R \\
 M(t) &= k i_w \\
 e_w &= k \omega_1
 \end{aligned}$$

gdzie  $k$  - stała silnika wynikająca z jego parametrów konstrukcyjnych.

Przykład 2.15

Zbudować model matematyczny obiektu jak na rysunku 2.15.



Rys. 2.15

$$\begin{aligned} \left( J_s D + B_s + \frac{1}{C_1 D} \right) \omega_1 - \frac{1}{C_1 D} \omega_2 &= M_s \\ -\frac{1}{C_1 D} \omega_1 + \left( J_1 D + B_1 + \frac{1}{C_1 D} \right) \omega_2 + M_0 &= 0 \\ \left( B_2 + \frac{1}{C_2 D} \right) \dot{x}_1 - \left( B_2 + \frac{1}{C_2 D} \right) \dot{x} &= f_0 \\ \left( m D + B_2 + \frac{1}{C_2 D} \right) \dot{x} - \left( B_2 + \frac{1}{C_2 D} \right) \dot{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

równania więzów:  $M_0 = f_0 R$   
 $\dot{x}_1 = R \omega_2$