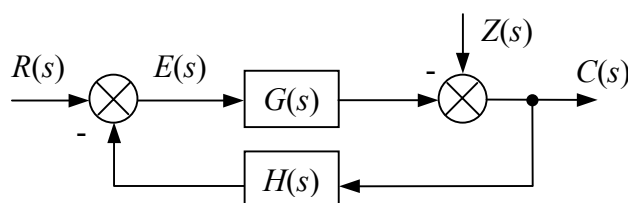


9. OCENA JAKOŚCI PRACY UKŁADU REGULACJI

Mamy zredukowany układ regulacji:



Rys. 9.1

Mamy trzy typy UAR ze względu na relacje między $R(s)$, $C(s)$ i $Z(s)$:

- a) Układy stabilizujące (stałowartościowe):
 - stały sygnał sterujący $R(s)$;
 - możliwie dobrze nie reagować na zakłócenia;
 - szybko kompensować ich wpływ.
- b) Układy programowe:
 - programowany (znany) sygnał sterujący $R(s)$ – deterministyczny;
 - wiernie odtwarzać ten sygnał;
 - wpływ na zakłócenia na drugim planie.
- c) Układy nadążne (śledzące):
 - serwomechanizm – odtwarzanie z dużą dokładnością prędkości i mocy – ruchów zadawanych;
 - $R(s)$ – stochastyczny;
 - reagować na sygnał o nieznanym charakterze;
 - w miarę możliwości kompensować działanie zakłóceń.

Dla sprawdzenia czy układ spełnia postawione przez nas wymagania stosuje się następujące kryteria jakości pracy:

1. Parametry odpowiedzi skokowej na sygnał sterujący lub zakłócający.
2. Kryterium stabilności aperiodycznej.
3. Kryteria częstotliwościowe:
 - a) kryterium optymalnego modułu;
 - b) kryterium amplitudy rezonansowej;
 - c) kryterium zapasu wzmocnienia i fazy.
4. Kryterium rozmieszczenia pierwiastków równania charakterystycznego.
5. Kryteria (wskaźniki) całkowe:
 - a) całka z sygnału uchybu;
 - b) całka z kwadratu sygnału uchybu;
 - c) całka z bezwzględnej wartości sygnału uchybu;
 - d) całka z bezwzględnej wartości sygnału uchybu mnożonej przez czas.

Układy rzeczywiste na ogół nie spełniają wymagań precyzowanych przez poszczególne kryteria i dlatego ocenę jakości łączy się z synteza układu. Synteza polega na wprowadzeniu do układu dodatkowego członu dobranego tak, aby układ zachowywał się zgodnie z wymaganiami. Ten dodatkowy człon nosi nazwę regulatora i w większości przypadków umieszcza się go w torze głównym.

Założenia upraszczające:

- w układzie występuje jednostkowe sprzężenie zwrotne;

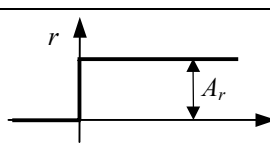
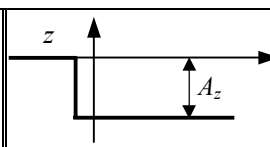
9. Ocena jakości pracy układu regulacji

- w torze sprzężenia zwrotnego występuje człon proporcjonalny o znanym wzmacnieniu $H(s) = \text{const}$, który przenosimy do toru głównego według klasycznych zasad, tak aby sprzężenie było jednostkowe.

9.1. Parametry odpowiedzi skokowej na sygnał sterujący i zakłócający

Tabela 9.1.

Na sygnał sterujący	Na sygnał zakłócający
<p>The graph shows a step response $r(t)$ starting from zero. It rises to a peak, then oscillates around a steady-state value r. Key parameters are labeled: c_{ur} (steady-state value), Δc_{mr} (overshoot), c_{mr} (peak value), t_{rr} (settling time), and Δr (steady-state error). A slope c_r is also indicated.</p>	<p>The graph shows a step response $z(t)$ starting from zero. It rises to a peak, then oscillates around a steady-state value z. Key parameters are labeled: Δc_{mz} (overshoot), c_{mz} (peak value), t_{rz} (settling time), and A (maximum response). A slope c_z is also indicated.</p>
<p>a) czas regulacji t_{rr} (charakteryzuje właściwości dynamiczne). Najkrótszy czas po upływie którego wartość odpowiedzi układu nie różni się od swej wartości ustalonej więcej niż o zadaną wartość odchylenia regulacji</p> $c_{ur} - \Delta r \leq c_r(t) \leq c_{ur} + \Delta r$ <p>Zwykle $\Delta r = (0,03 \div 0,05)c_{ur} = (3 \div 5)\%c_{ur}$</p>	<p>a) czas regulacji t_{rz}</p>
<p>b) przeregulowanie Δc_{mr} (charakteryzuje właściwości dynamiczne). Przeregulowaniem nazywamy liczbę charakteryzującą nadwyżkę dynamiczną w stosunku do wartości ustalonej.</p> $\Delta c_{mr} [\%] = \frac{c_{mr} - c_{ur}}{c_{ur}} \cdot 100$ <p>Ze względu na procesy technologiczne można wyróżnić trzy typy układów:</p> <ul style="list-style-type: none"> - mogą wystąpić duże przeregulowania do 25%; - średnie przeregulowania około 15%; - małe przeregulowania (5%) lub ich brak. 	<p>b) wartość maksymalna odpowiedzi</p> $c_{mz} = A$
<p>c) błąd statyczny Δc_{ur}. Błędem statycznym nazywamy różnicę w stanie ustalonym między wymaganą wartością sygnału wyjściowego a rzeczywistą wartością tego sygnału.</p> $\Delta c_{ur} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c_r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s E_1(s)$ <p>$E_1(s)$ – transformata sygnału uchybu.</p>	<p>c) błąd statyczny Δc_{uz}</p> $\Delta c_{uz} = \lim_{t \rightarrow \infty} [0 - c_z(t)] = - \lim_{t \rightarrow \infty} c_z(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} s c_z(s)$

<p>Wartość błędu statycznego zależy od liczby członów idealnie całkujących w głównym torze regulacji. Klasa 0 – układ statyczny, 0 członów idealnie całkujących. Klasa 1 – układ astatyczny 1. stopnia, 1 człon idealnie całkujący. Klasa 2 – układ astatyczny 2. stopnia, 2 człony idealnie całkujące. Wartości błędu statycznego w zależności od klasy układu są następujące: K_r – wzmacnienie regulatora; K – współczynnik wzmacnienia w funkcji $G(s)$. K_z – współczynnik wzmacnienia w torze sprzężenia zwrotnego.</p>			
Klasa	Sygnał sterujący 	Klasa	Sygnał sterujący 
0	$\Delta C_{ur} = \frac{A_r}{1 + K_r K K_z}$	0	$\Delta C_{uz} = \frac{A_z}{1 + K_r K K_z}$
1	0	1	0
2	0	2	0

W praktyce w UAR z jednym sprzężeniem zwrotnym $t_{rr} \approx t_{rz} = t_r$; $\Delta c_{ur} = \Delta c_{uz} = \Delta c_u$

9.2. Kryterium stabilności aperiodycznej [6]

Aperiodyczny charakter odpowiedzi układu na sygnał sterujący lub zakłócający, zależy od wartości pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego. Pierwiastek dominujący tego równania powinien być rzeczywisty ujemny. Kryterium to polega na narzuceniu takich warunków na współczynniki funkcji przejścia regulatora, aby pierwiastek dominujący równania charakterystycznego był rzeczywisty ujemny i miał maksymalną krotność. Warunki te wynikają z twierdzenia: *Jeżeli równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma n-krotny pierwiastek rzeczywisty ujemny to pochodne lewej strony tego równania, aż do n – 1 włącznie mają ten sam pierwiastek.*

$$1 + H(s)G(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

pochodne:

$$\begin{cases} n a_n s^{n-1} + (n-1) a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1 = 0 \\ \vdots \\ n! a_n s + (n-1)! a_{n-1} + \dots = 0 \end{cases}$$

Z tego układu równań wyznacza się wartość pierwiastka n-krotnego i wartości pozostałych parametrów regulatora.

Kryterium to umożliwia:

- odpowiedź bez przeregulowania;
- minimalny czas regulacji spośród odpowiedzi aperiodycznych.

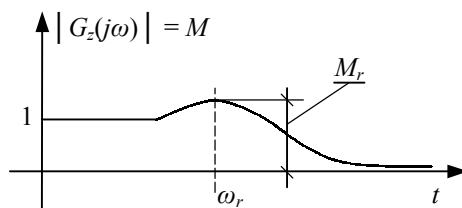
Stosuje się do układów, gdzie wymagane są powyższe zalety.

9.3. Kryterium optymalnego modułu (optimum modułu bez bieguna zerowego; optimum symetryczne z biegunem zerowym)

Funkcja przejścia układu zamkniętego

$$G_z(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_r(s)K_z G(s)}{1 + G_r(s)K_z G(s)}$$

Zakładając chwilowo że znane są parametry regulatora, można wyznaczyć charakterystykę amplitudową układu zamkniętego.



Rys. 9.2

Kryterium to polega na takim doborze współczynników funkcji przejścia regulatora, aby były spełnione dwa wymagania:

1. Pasma pulsacji sygnału użytecznego powinno być możliwie szerokie, czyli że pulsacja rezonansowa ω_r powinna być duża, a to oznacza, że będą małe czasy regulacji t_r .

duża $\omega_r \rightarrow$ mały t_r

2. Charakterystyka amplitudowa powinna mieć małą amplitudę rezonansową, co sprowadza się do małych przeregulowań w układzie.

mały $M_r \rightarrow$ małe Δc_m

Powyższe warunki można ująć w postaci następującego wzoru:

$$\left[D_\omega^W |G_z(j\omega)|^2 \right]_{\omega=0} = 0$$

Gdzie: $D_\omega = \frac{d}{d\omega}$;

W – rząd pochodnej, przy czym $W=2n$ a $n=1,2,3,\dots$;

n – liczba poszukiwanych parametrów regulatora.

Symbol $W=2n$ oznacza, że dla jednego parametru regulatora obliczamy pochodną II rzędu; dla dwóch parametrów regulatora obliczamy pochodną II i IV rzędu dla trzech parametrów regulatora obliczamy pochodną II IV i VI rzędu

Z powyższych ogólnych warunków, za pomocą podstawienia $G_z(j\omega) = \frac{L_z(j\omega)}{M_z(j\omega)}$ można

otrzymać następujący wzór praktyczny:

$$\left[\frac{\sum_{K=0}^W (-1)^{W-K} \cdot \binom{W}{K} D_\omega^K \cdot L_z(j\omega) \cdot D_\omega^{W-K} \cdot L_z(j\omega)}{\sum_{K=0}^W (-1)^{W-K} \cdot \binom{W}{K} D_\omega^K \cdot M_z(j\omega) \cdot D_\omega^{W-K} \cdot M_z(j\omega)} \right]_{\omega=0} = \left[\frac{L_z(j\omega) \cdot L_z(-j\omega)}{M_z(j\omega) M_z(-j\omega)} \right]_{\omega=0}$$

Kryterium umożliwia :

- małe czasy regulacji;
- małe przeregulowanie.

Do projektowania układów nadążnych i programowych.

9.4. Kryterium amplitudy rezonansowej

Dobór parametrów regulatora przeprowadza się w sposób uproszczony w dwóch etapach:

1. Na podstawie doświadczenia o projektowaniu UAR zakłada się stałe czasowe regulatorów.
2. Współczynnik wzmocnienia regulatora wyznacza się tak, aby amplituda rezonansowa, spełniała warunki zapasu stabilności:

$$1,1 \leq M_r \leq 1,5 \quad \text{lub} \quad 1dB \leq LM_r \leq 4dB$$

Zastosowanie monogramów

Dobór współczynnika wzmocnienia przeprowadza się na ogół na drodze graficznej wykorzystując monogramy, wiążące charakterystyki częstotliwościowe w układzie otwartym i układzie zamkniętym. Nomogramy te pozwalają wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową układu zamkniętego na podstawie charakterystyki w układzie otwartym.

$$H(j\omega)G(j\omega) = G_r(j\omega)K_z G(j\omega) = X + jY$$

$$X = X(\omega) = \operatorname{Re} H(j\omega)G(j\omega)$$

$$Y = Y(\omega) = \operatorname{Im} H(j\omega)G(j\omega)$$

Widmowa funkcja przejścia układu zamkniętego:

$$G_z(j\omega) = \frac{H(j\omega)G(j\omega)}{1 + H(j\omega)G(j\omega)} = \frac{X + jY}{(1 + X) + jY}$$

$$M = |G_z(j\omega)| = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

Dla danej wartości ω można na podstawie charakterystyki w układzie otwartym wyznaczyć współrzędne X, Y a następnie wartości M . Zatem każdemu punktowi płaszczyzny X, Y (czyli w układzie otwartym) można przyporządkować odpowiednią wartość M . W celu przyporządkowania powyższy wzór przedstawia się w innej formie, zakładając że M jest parametrem.

Dla $M < 1$ otrzymujemy równanie okręgu:

$$\left[X - \frac{M^2}{1 - M^2} \right]^2 + Y^2 = \left[\frac{M}{1 - M^2} \right]^2$$

$$X_M = \frac{M^2}{1 - M^2},$$

$$\text{współrzędne środka } Y_M = 0,$$

$$r_M = \frac{M}{1 - M^2}$$

Dla $M = 1$ jest to prosta:

$$X = -\frac{1}{2}$$

Dla $M > 1$ jest to równanie okręgu:

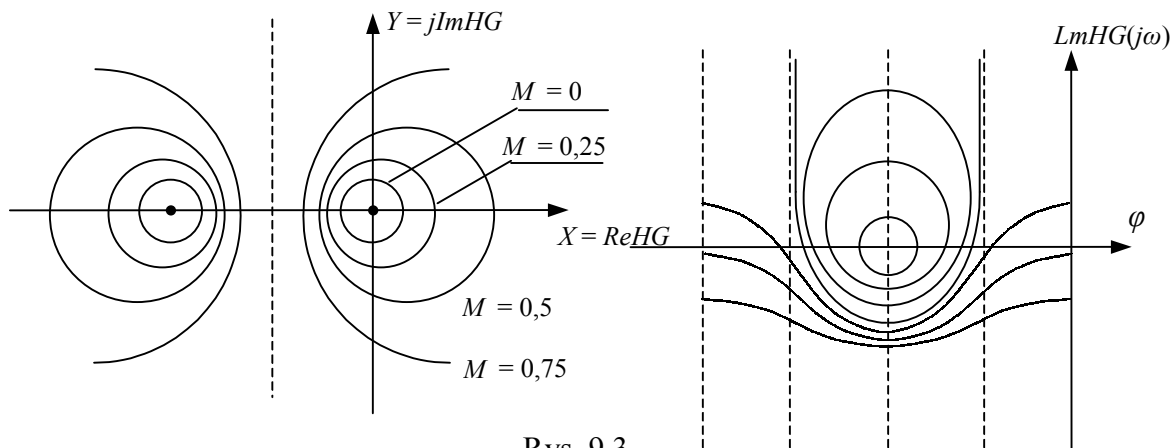
$$\left[X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right]^2 + Y^2 = \left[\frac{M}{M^2 - 1} \right]^2$$

$$X_M = -\frac{M^2}{M^2 - 1},$$

współrzędne środka $Y_M = 0,$

$$r_M = \frac{M}{M^2 - 1}$$

Na podstawie powyższych równań w układzie współrzędnych X,Y otrzymujemy krzywe:

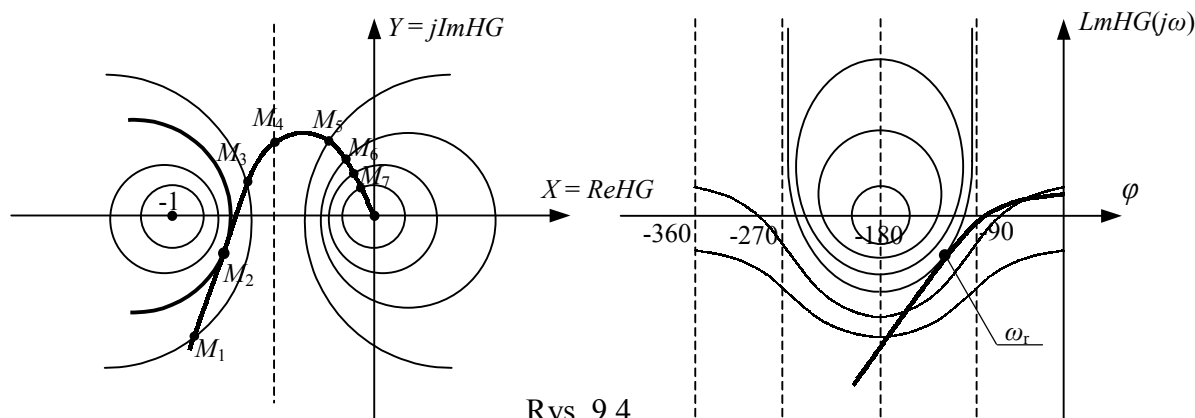


Rys. 9.3

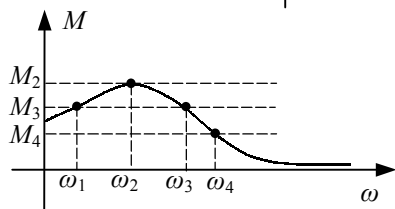
Krzywe M, lub linie stałych wartości modułu lub monogram Halla

Monogram Bleacka (Nicholsa) stosowany do wykresów Bleacka

a) amplituda rezonansowa M_r i pulsacja rezonansowa ω_r układu zamkniętego na podstawie charakterystyk w układzie otwartym.



Rys. 9.4



Rys. 9.5

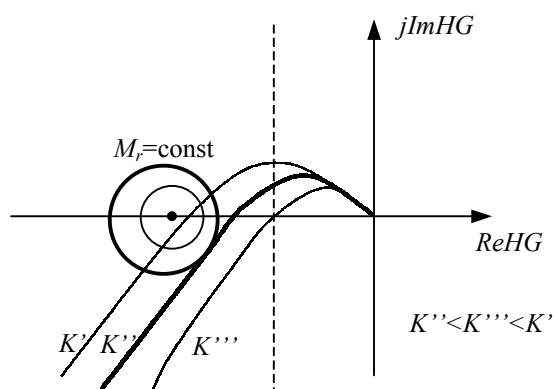
Dla znalezienia amplitudy rezonansowej spośród okręgów $M = \text{const}$, należy znaleźć okrąg styczny do charakterystyki amplitudowo-fazowej w układzie otwartym.

9. Ocena jakości pracy układu regulacji

Pulsacja odpowiadająca punktowi styczności jest pulsacją rezonansową.

b) ogólne wytyczne doboru wzmacnienia:

I sposób:

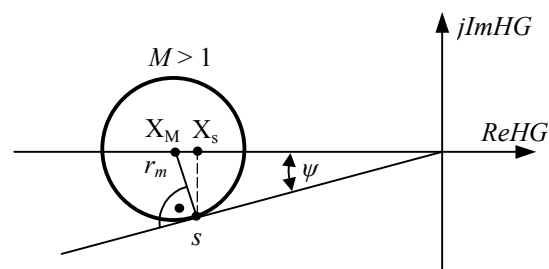


Rys. 9.6

K'''' – jest wymaganą wartością współczynnika wzmacnienia w układzie otwartym, zapewniającą osiągnięcie przyjętej amplitudy M_r .

II sposób:

Przy doborze współczynnika dla zadanej wartości M_r można wykorzystać następujące własności okręgów $M = \text{const}$.

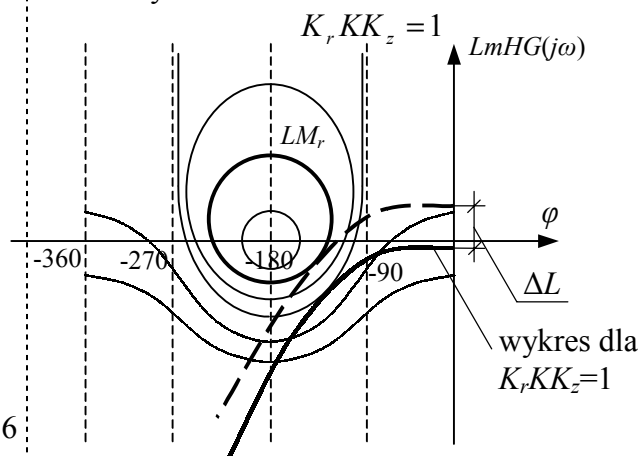


Rys. 9.7

Dla powyższego rysunku:

$$\sin \psi = \frac{1}{M} \quad \text{oraz} \quad X_s = -1$$

a) buduje się wykres Bleacka przyjmując wstępnie współczynnik wzmacnienia np. równy 1



b) bada się położenie wykresu Bleacka względem monogramu.

Aby uzyskać styczność charakterystyki z zadaną krzywą $LM_r = \text{const}$, należy zwiększyć lub zmniejszyć wzmacnienie w układzie otwartym.

Wzrost wzmacnienia odpowiada równoległemu przesunięciu charakterystyki w górę i na odwrót.

c) na podstawie wymaganego przesunięcia ΔL wyznacza się wymagany współczynnik wzmacnienia a stąd wymagane wzmacnienie regulatora:

$$K_r = \frac{(K_r K K_z)_{wymagane}}{K K_z}$$

c) przeregulowanie i czas regulacji.

Amplituda rezonansowa M_r i pulsacja rezonansowa ω_r , pozwalają na oszacowanie przeregulowania i czasu regulacji układu skorygowanego dowolnego rzędu. Oszacowanie to opiera się na założeniu, że o własnościach układu (nawet wyższych rzędów) decydują

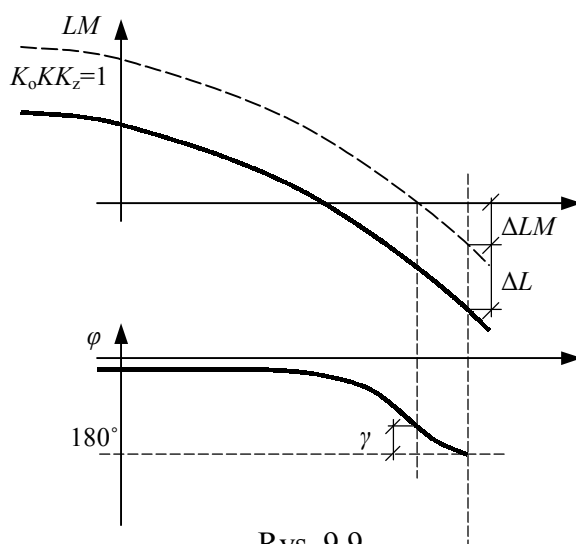
- b) współczynnik wzmocnienia ustala się w ten sposób aby uzyskać wymagany zapas wzmocnienia i fazy, a więc:

$$6dB \leq \Delta L_{<M} \leq 12dB$$

$$30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$$

Dobór wzmocnienia:

- a) wykonanie charakterystyki amplitudowej i fazowej przy założeniu, że współczynniki wzmocnienia $K_o K K_z = 1$;
- b) analiza położenia charakterystyki amplitudowej względem zadanego zapasu fazy;



Rys. 9.9

- c) należy przyjąć wartość liczbowa wymaganego zapasu fazy i przesunąć równoległe charakterystykę amplitudową w górę lub w dół. Na podstawie wielkości przesunięcia ΔL można znaleźć wzmocnienie regulatora.
- d) w przypadku wystąpienia dużych rozbieżności w zapasie wzmocnienia, należy zmienić wartości stałych czasowych i powtórzyć wszystko.

W identyczny sposób można korzystać z wykresu Blacka.

9.6. Kryterium rozmieszczenia pierwiastków równania charakterystycznego (metoda Evansa)

Kryterium to polega na uproszczonym doborze parametrów regulatora:

- a) zakłada się wartości stałych czasowych;
- b) buduje się wykres kolejnych położenia pierwiastków równania charakterystycznego, w którym współczynnik wzmocnienia przyjmuje wszystkie fizycznie możliwe wartości. Wykres ten nosi nazwę miejsca geometrycznego pierwiastków równania charakterystycznego (mgp).
- c) Wymagane wzmocnienie wyznacza się z mgp dla zapasu stabilności określonego liczbą tłumienia pierwiastków dominujących.

$$0,4 \leq \xi_z \leq 0,8$$

9.7. Całkowe wskaźniki jakości

Wskaźniki całkowite są wartościami całek z nieustalonej części sygnału uchybu, występującego w układzie regulacji przy skokowym sygnale sterującym lub zakłócającym.

1) Całka z sygnału uchybu: $I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon_n(t) dt$

2) Całka z kwadratu sygnału uchybu: $I_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon_n(t)]^2 dt$;

3) Całka z bezwzględnej wartości sygnału uchybu: $I_3 = \int_0^{\infty} |\varepsilon_n(t)| dt$;

4) Całka z bezwzględnej wartości sygnału uchybu mnożonej przez czas: $I_4 = \int_0^{\infty} |\varepsilon_n(t)| t dt$;

Metoda dokładna doboru parametrów regulatora polega na minimalizacji wybranego wskaźnika ze względu na wartość poszukiwanych parametrów np.:
 $\frac{\delta I}{\delta K_r} = 0, \frac{\delta I}{\delta T_i} = 0, \frac{\delta I}{\delta T_d} = 0$ itp.

Minimalizacja wartości wybranego wskaźnika ma pewne uzasadnienie fizyczne, gdyż stanowi on pewną miarę strat energetycznych układu. W praktyce otrzymanie zadowalających wyników jest utrudnione ze względu na trudności z rozwiązaniem powyższego układu równań.

Metoda uproszczona doboru parametrów regulatora polega na założeniu wartości stałych czasowych na podstawie doświadczenia, a następnie na minimalizacji wskaźnika ze względu na współczynnik wzmocnienia.

Uwagi: W praktyce dość często straty energetyczne są proporcjonalne do kwadratu sygnału uchybu, stąd wynika stosowanie kryterium I_2 . Wskaźnik ten prowadzi do układów mało wrażliwych na zakłócenia przypadkowe, mające odpowiedzi o stosunkowo krótkim czasie regulacji, lecz należy się liczyć z wystąpieniem dużych przeregulowań ok. 45%. Ponadto często stosuje się wskaźnik I_4 , który ogólnie zapewnia mniejsze wartości przeregulowania przy nieco większym czasie regulacji.

Nieustalona część sygnału uchybu:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_p(t) + \varepsilon_n(t)$$

$$\varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)$$

gdy sygnał sterujący jest funkcją skokową $\varepsilon_n(t) = \text{const}$.

$e_p(s) = e(s) - \frac{1}{s} e_n(s)$ przy skokowym sygnale sterującym, na podstawie schematu blokowego mamy:

$$e(s) = R(s) - c(s) = R(s) - R_1(s) \frac{G_r(s) K_z G(s)}{1 + G_r(s) K_z G(s)} = R(s) \frac{1}{1 + G_r(s) K_z G(s)}$$

dla $R(s) = \frac{A}{s}$; $e(s) = \frac{A}{s[1 + G_r(s) K_z G(s)]}$.

$e_n = \Delta c_n$ – błąd statyczny, wobec tego:

$$e_p(s) = \frac{A}{s[1 + G_r(s) K_z G(s)]} - \frac{1}{s} \Delta c_n = \frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0}$$

Wskaźnik I_2 . Całkowanie wymagane przez wskaźnik I_2 , można również wykonać w obszarze zmiennej zespolonej lub w obszarze częstotliwości:

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon_p(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \varepsilon_p(s) \varepsilon_p(-s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\varepsilon_p(j\omega)|^2 d\omega$$

9. Ocena jakości pracy układu regulacji

Na podstawie powyższego wzoru można otrzymać następujące wartości wskaźnika I_2 :

Tabela 9.2.

Rząd równania n	Wartość I_2
1	$\frac{c_0^2}{2d_1d_0}$
2	$\frac{c_1^2 + \frac{d_2}{d_0}c_0^2}{2d_2d_1}$
3	$\frac{d_1c_2^2 + d_3(c_1^2 - 2c_0c_2) + \frac{d_3d_2}{d_0}c_0^2}{2d_3(d_1d_2 - d_0d_3)}$

Po wyznaczeniu parametrów regulatora należy oszacować przeregulowanie i czas regulacji. W tym celu można wykorzystać charakterystyki logarytmiczne, amplitudowe i fazowe, tak jak w kryterium zapasu wzmocnienia i fazy. Za pomocą całki I_2 można projektować wszystkie trzy typy układów.

Wskaźnik I_4 . Obliczenie całki I_4 jest utrudnione z uwagi na konieczność stosowania fazy czasowej. W związku z tym najwygodniej jest minimalizować całkę I_4 za pomocą maszyny analogowej lub cyfrowej. W przypadku skokowego sygnału sterującego oraz dla pewnych typowych funkcji przejścia układu zamkniętego można w literaturze znaleźć następujące wyniki badań:

Tabela 9.3.

n	$G_z(s)$	Równanie charakterystyczne przy którym $I_4=I_{4\min}$	Odpowiedź układu
2	$G_z(s) = \frac{\omega_0^n}{s^n + a_{n-1}\omega_0s^{n-1} + a_1\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n}$	$s^2 + 1,4\omega_0s + \omega_0^2$	
3		$s^3 + 1,75\omega_0s^2 + 2,15\omega_0^2s + \omega_0^3$	
4		$s^4 + 2,1\omega_0s^3 + 3,4\omega_0^2s^2 + 2,7\omega_0^3s + \omega_0^4$	

Dla wyznaczenia parametrów regulatora, należy posłużyć się równaniem charakterystycznym, którego współczynniki zapewniają minimum całki I_4 . Dla wyznaczenia przeregulowania i czasu regulacji można wykorzystać odpowiedź układu we współrzędnych bezwymiarowych, mianowicie : przeregulowanie można odczytać wprost z wykresu a czas regulacji obliczyć ze wzoru $t_r = \frac{t_{br}}{\omega_0}$, gdzie t_{br} – bezwymiarowy czas regulacji.

$c_n = \frac{c(t)}{c_n}$ - bezwymiarowa wartość odpowiedzi, $t_n = \omega_0 t$ - bezwymiarowy czas.

Przykład 9.1

Transmitancja układu zamkniętego ma postać:

$$G_z(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Określić warunki otrzymania:

- a) astatyzmu rzędu zerowego; $b_0 \neq a_0$
- b) astatyzmu rzędu pierwszego; $b_0 = a_0, b_1 \neq a_1$
- c) astatyzmu rzędu drugiego. $b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_2 \neq a_2$

Przykład 9.2

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać:

$$G_z(s) = \frac{A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_1 s + A_0}{B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0}$$

Określić warunki uzyskania przez układ zamknięty z $H(s)=1$:

- a) astatyzmu rzędu zerowego; $B_0 \neq 0$
- b) astatyzmu rzędu pierwszego; $B_0 = 0$
- c) astatyzmu rzędu drugiego. $B_0 = 0; B_1 = 0$

Przykład 9.3

Transmitancja operatorowa układu otwartego wyraża się wzorem:

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

gdzie $K = 20; T_1 = 0,02s; T_2 = 0,03s$.

Na wejście doprowadzono sygnał sinusoidalny o amplitudzie $R_{\max} = 10$ i okresie $T_R = 7$. Wyznaczyć amplitudę uchybu.

Rozwiązanie:

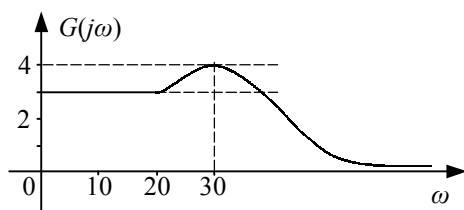
$$G_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} \rightarrow \varepsilon_{\max} = |G_\varepsilon(j\omega_R)| R_{\max}$$

$$\text{gdzie } \omega_R = \frac{2\pi}{T_R} = 0,9 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sek}} \right]$$

$$\text{lub } |G_o(j\omega_R)| \rightarrow \varepsilon_{\max} = \frac{R_{\max}}{|G_o(j\omega_R)|}$$

Przykład 9.4

Wyznaczyć amplitudę rezonansową z wykresu.



Rys. 9.10

$$M_r = \frac{|G(j\omega)|_{\max}}{G_o} = \frac{4}{3} = 1,33$$

Przykład 9.5

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać: $G_o(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$,
określić wartość uchybu w stanie ustalonym, jeżeli sygnał wejściowy zmienia się ze stałą
prędkością $12t$, $K = 100 \frac{1}{s}$; $T_1 = 0,01s$; $T_2 = 0,005s$.

$$\text{Transmitancja uchybowa } \frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+G_o(s)} \rightarrow \varepsilon(s) = \frac{X(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{12}{s^2}}{1+G_o(s)}$$

$$\varepsilon_{ust}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12}{s + \frac{100}{(1+0,01s)(1+0,005s)}} = 0,12$$

Przykład 9.6

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego ma postać:

$$G_z(s) = \frac{5s + 200}{0,001s^3 + 0,5s^2 + 6s + 200}$$

Znaleźć wartość uchybu w stanie ustalonym, jeżeli sygnał wejściowy zmienia się zgodnie
ze wzorem $X(t) = 5 + 20t + 10t^2$

Transmitancja uchybowa :

$$G_\varepsilon(s) = 1 - G_z(s)$$

$$E(s) = X(s) \cdot G_\varepsilon(s)$$

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \infty$$

Przykład 9.7

Transmitancja obiektu ma postać: $G_o(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$

Określić transmitancję elementu $H(s)$ sprzężenia zwrotnego, przy której układ zamknięty
będzie astatyczny rzędu pierwszego.

$$G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)H(s)} = \frac{K}{T_1T_2s^2 + (T_1+T_2)s + 1 + H(s)K}$$

Astatyzm rzędu pierwszego (brak uchybu statycznego) wystąpi gdy:

$$K = 1 + H(s)K \rightarrow H(s) = \frac{K-1}{K} = 1 - \frac{1}{K}$$

$$\text{wtedy: } G(s) = \frac{K}{T_1T_2s^2 + (T_1+T_2)s + K}$$

a transmitancja obiektu równoważnego z jednym sprzężeniem zwrotnym

$$G(s) = \frac{G_{zo}(s)}{1+G_{zo}(s)} \rightarrow G_{zo}(s)G(s) + G(s) = G_{zo}(s)$$

$$G_{zo}(s) = \frac{G(s)}{1-G(s)}$$

$$G_{zo}(s) = \frac{K}{(T_1 + T_2)s \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} s + 1 \right)} = \frac{K_\Omega}{s(T_{zo} + 1)}$$

gdzie $K_\Omega = \frac{K}{T_1 + T_2}$; $T_{zo} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

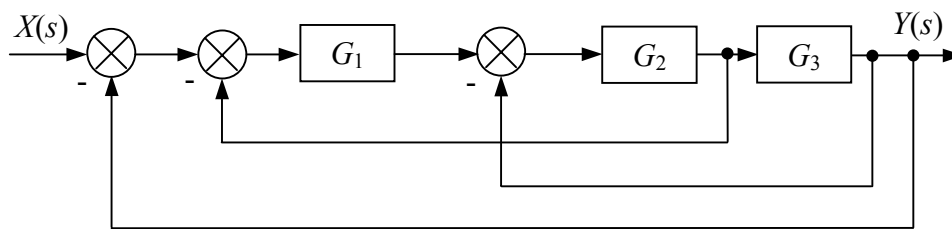
Przykład 9.8

Znaleźć współczynnik wzmocnienia i stałą czasową filtru, który włączony w pętlę sprzężenia zwrotnego z zadania poprzedniego spowoduje, że w układzie nie wystąpi

dotychczasowy uchyb prędkościowy. $H(s) = \frac{K_{sz}}{1 + \tau_z s}$

Przykład 9.9

Znaleźć transmitancję układu, odpowiedź $y(t)$ oraz jej wartość ustaloną y_{ust} .



Rys. 9.11

$$G_1(s) = K_1; G_2(s) = K_2; G_3(s) = \frac{K_3}{T_3 s + 1};$$

$$G_z(s) = \frac{K_z}{T_z s + 1}; \quad y(s) = \frac{K_z}{s(T_z s + 1)};$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_z}{s(T_z s + 1)} = K_z;$$

$$y(t) = K_z \cdot u(t) - K_z e^{-\frac{t}{T_z}}$$

Przykład 9.10

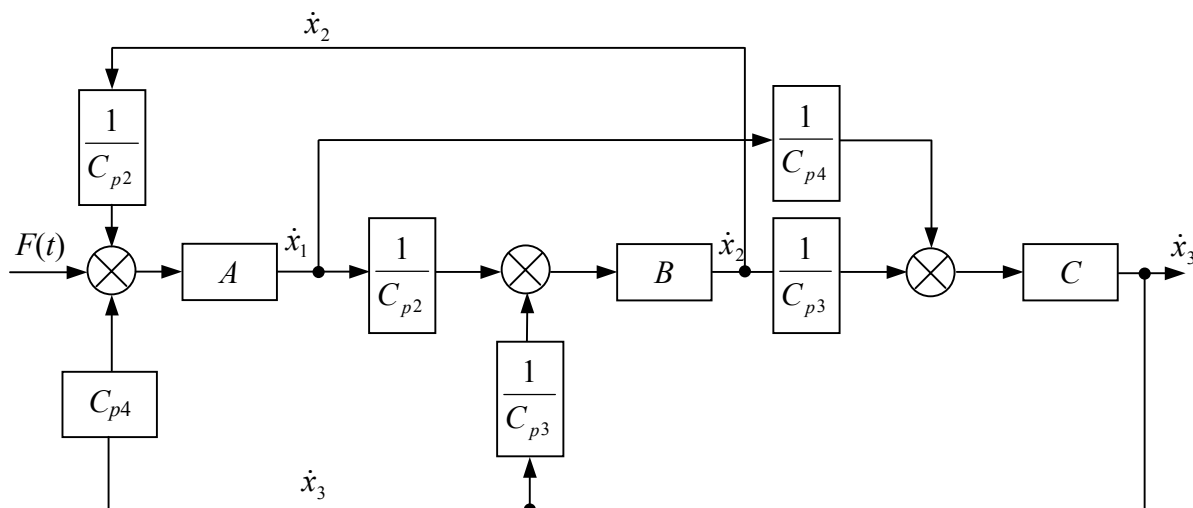
Sporządzić schemat blokowy do układu z zadania 2.10.

Wejście $F(t)$, wyjście x_3

$$F(t) = \left(m_1 s^2 + B_{p1} s + \frac{1}{C_{p1}} + \frac{1}{C_{p2}} + \frac{1}{C_{pn}} \right) \dot{x}_1 - \frac{1}{C_{p2}} \dot{x}_2 - \frac{1}{C_{p4}} \dot{x}_3$$

$$0 = \left(m_2 s^2 + \frac{1}{C_{p2}} + \frac{1}{C_{p3}} \right) \dot{x}_2 - \frac{1}{C_{p2}} \dot{x}_1 - \frac{1}{C_{p3}} \dot{x}_3$$

$$0 = \left(m_3 s^2 + B_{p2} s + \frac{1}{C_{p5}} + \frac{1}{C_{p3}} + \frac{1}{C_{p4}} \right) \dot{x}_3 - \frac{1}{C_{p3}} \dot{x}_2 - \frac{1}{C_{p4}} \dot{x}_1$$



Rys. 9.12

Przykład 9.11

Dany jest układ regulacji nadążnej, którego transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,02s)(1 + 0,01s)(1 + 0,005s)}$$

Należy dobrać korektor szeregowy tak aby układ był astatyczny rzędu pierwszego i spełniał następujące warunki dotyczące jakości regulacji:

- wartość współczynnika odchylenia prędkościowego $C_1 = \frac{1}{200[s]}$
- czas trwania regulacji $t_r \leq 0,8 s$

Rozwiązanie:

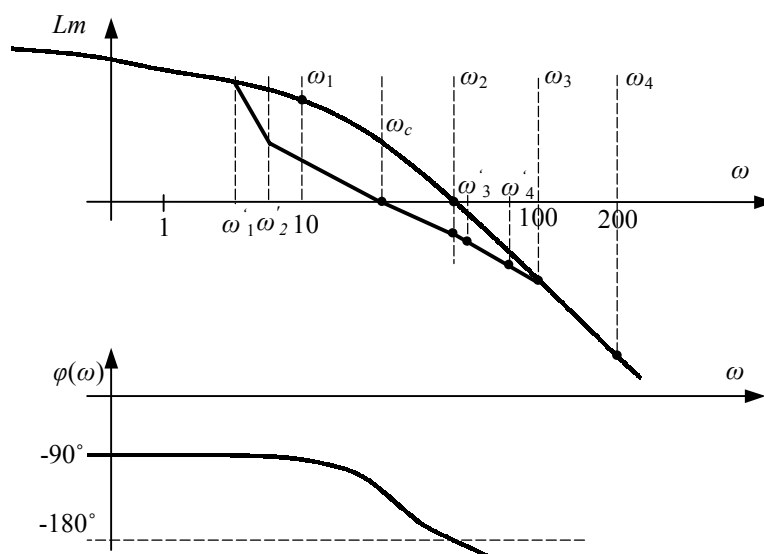
1) Warunek a) narzuca wartość współczynnika wzmocnienia $K = \frac{1}{C_1} = 200$

2) Dla tego współczynnika wyznaczamy charakterystyki logarytmiczne:

$$\begin{aligned} \text{Lm}G_o(j\omega) = & 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} + \\ & + 20 \log \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + T_4^2 \omega^2} \end{aligned}$$

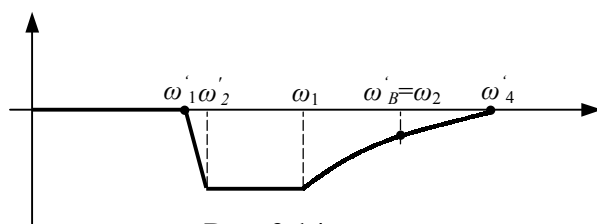
$$\text{Arg}G_o(j\omega) = -90^\circ - \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega - \arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega$$

$$\omega_1 = 10 \quad , \quad \omega_2 = 50 \quad , \quad \omega_3 = 100 \quad , \quad \omega_4 = 200$$



Rys. 9.13

- 3) Pulsacja odcięcia $\omega_c = \frac{2 \div 4\pi}{t_r} = 7,86 \div 15,7 \frac{rad}{s}$ przyjmujemy $14 \frac{rad}{s}$
- 4) Punkt załamania charakterystyki $\omega_c - \omega_2 = 0,2 \div 0,9 \text{ dekad} = \omega_3 - \omega_c$

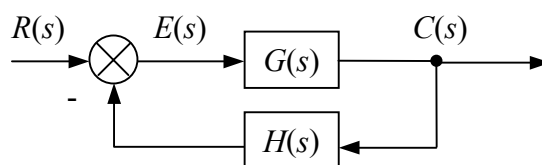


Rys. 9.14

9.8. Błędy statyczne w układach regulacji

Przykład 9.12

Dany jest układ regulacji o schemacie pokazanym na rysunku 9.15.



Rys. 9.15

Wyznaczyć wartość błędu statycznego w przypadku sygnału sterującego $r(t) = A1(t)$, dla danych:

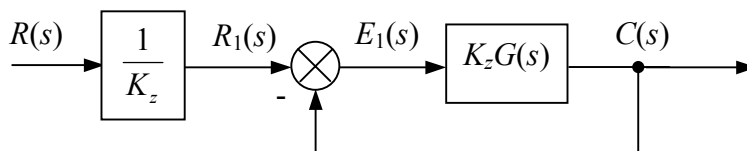
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$K = 6 \text{ [cm/V]}$$

$$K_z = 0,5 \text{ [cm/V]}$$

$$A = 1 \text{ [V]}$$

Obliczenie błędu statycznego, a następnie porównywanie w stanie ustalonym sygnału wyjściowego z wejściowym, jest bardzo wygodne w przypadku jednostkowego sprzężenia zwrotnego. W związku z tym włączymy człon sprzężenia zwrotnego przed węzeł sumacyjny otrzymując schemat blokowy w postaci pokazanej na rysunku 9.16.



Rys. 9.16

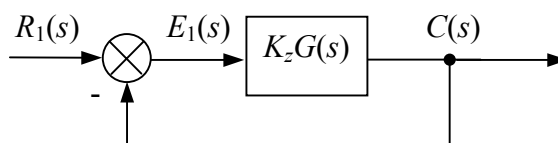
Blok zawierający odwrotność współczynnika wzmocnienia K_z nie wprowadza deformacji kształtu sygnału wejściowego, dzieli jedynie jego wartość chwilową przez stałą liczbę. Można zatem rozpatrywać zastępczy sygnał wejściowy, dochodzący do węzła sumacyjnego.

$$r_1(t) = A_1 1(t)$$

gdzie: A_1 – wartość zastępczego sygnału wejściowego obliczona ze wzoru:

$$A_1 = \frac{A}{K_z} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ [cm]}$$

W związku z tym dalsze rozważania można zawęzić do układu z zastępczym sygnałem wejściowym i posługiwać się schematem blokowym jak na rysunku 9.17.



Rys. 9.17

Błąd statyczny reprezentuje w stanie ustalonym różnicę między wymaganą wartością sygnału wyjściowego a rzeczywistą wartością tego sygnału: jest to inaczej mówiąc miara zdolności układu regulacji do odtworzenia w stanie ustalonym wprowadzonego sygnału sterującego. A zatem:

$$\Delta c_u = \lim_{t \rightarrow \infty} [r_1(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla układu z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, błąd statyczny jest jednocześnie wartością końcową sygnału uchybu. Dla układu o schemacie blokowym według rysunku 9.17 sygnał uchybu wynosi:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= R_1(s) - C(s) = R_1(s) - R_1(s)G_Z(s) = R_1(s)[1 - G_Z(s)] = \\ &= R_1(s) \left[1 - \frac{K_z G(s)}{1 + K_z G(s)} \right] = R_1(s) \frac{1}{1 + K_z G(s)} \end{aligned}$$

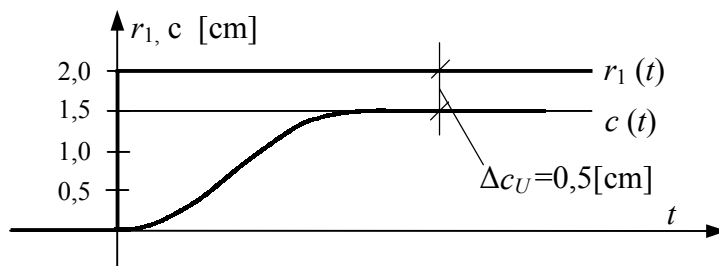
A zatem

$$E_1(s) = R_1(s) \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K K_z}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \Delta c_u &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_1}{s} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + KK_z} = \frac{A_1}{1 + KK_z} = \\ &= \frac{A_1}{1 + 6 \cdot 0,5} = 0,25 A_1 = 0,25 \cdot 2 = 0,5 [cm] \end{aligned}$$

Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, odpowiedź układu w stanie ustalonym różni się od wartości wymaganej $A_1 = 2$ [cm] o wartość błędu statycznego $\Delta c_u = 0,5$ [cm] i wynosi $c_u = 1,5$ [cm]. Zakładając przykładowo stabilny i inercyjny charakter odpowiedzi można sporządzić wykres porównawczy pokazany na rysunku 9.18.



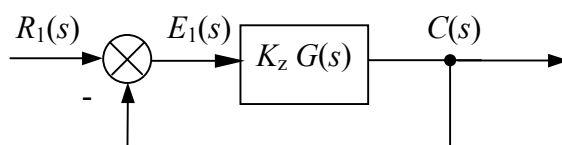
Rys. 9.18

Jak widać, w stabilnym stanie pracy, układy klasy 0, czyli nie zawierające członów idealnie całkujących, generują sygnał wyjściowy w stanie ustalonym zaniżony w stosunku do wymagań o wartość błędu statycznego. Wymagania reprezentuje tu skokowy sygnał sterujący $r_1(t) = A_1 1(t)$.

Przykład 9.13.

Wyznaczyć wartość błędu statycznego w przypadku skokowego sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 1(t)$, wprowadzonego do układu o schemacie blokowym sprowadzonym do postaci pokazanej na rysunku 9.19. Przyjąć dane:

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}, \quad A_1 = 2 [cm]$$



Rys. 9.19

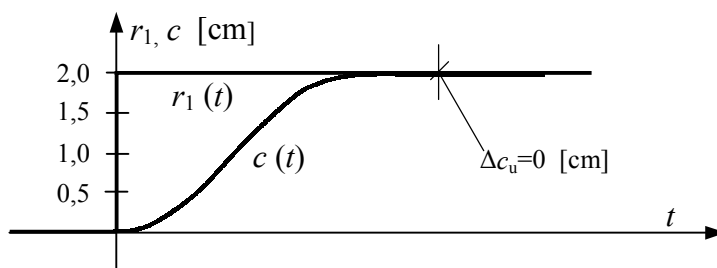
Na podstawie wyników z poprzedniego zadania wyznaczmy sygnał uchybu

$$E_1(s) = R_1(s) \frac{1}{1 + K_z G(s)} = R_1(s) \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + KK_z}$$

oraz obliczymy błąd statyczny

$$\Delta c_u = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_1}{s} \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + KK_z} = 0$$

Ponieważ błąd statyczny jest równy zero, więc w stanie ustalonym odpowiedź układu będzie pokrywać się z wartością sygnału sterującego. Zakładając przykładowo stabilny i inercyjny charakter odpowiedzi możemy naszkicować wykres porównawczy pokazany na rysunku 9.20.



Rys. 9.20

Jak widać, w stabilnym stanie pracy, układy klasy 1, czyli zawierające jeden człon idealnie całkujący, generują w stanie ustalonym sygnał wyjściowy odpowiadający wymaganiom sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 1(t)$.

Przykład 9.14.

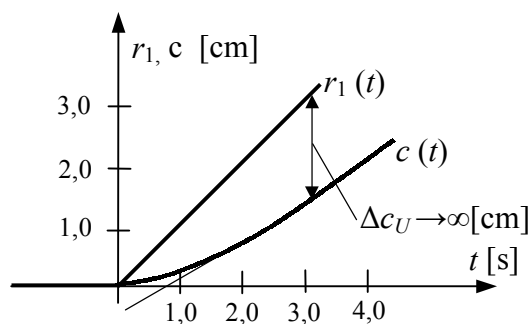
Wyznaczyć wartość błędu statycznego w przypadku liniowego sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 t$, wprowadzonego na wejście układu regulacji o schemacie blokowym według rys. 9.19 zamieszczonym w poprzednim przykładzie. Założyć, że w głównej linii regulacji znajduje się funkcja przejścia: $G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ oraz, że $A_1 = 1$ [cm/s].

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \text{ oraz, że } A_1 = 1 \text{ [cm/s].}$$

Na podstawie wyników uzyskanych w przykładzie 1 możemy od razu napisać wzór na błąd statyczny

$$\Delta c_u = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s R_1(s) \frac{1}{1 + K_Z G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_1}{s^2} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K K_Z} = \infty$$

Przyjmując następnie przykładowo stabilny oraz inercyjny charakter odpowiedzi układu, można sporządzić wykres porównawczy pokazany na rysunku 9.21.



Rys. 9.21

Jak widać, w stabilnym stanie pracy, układy klasy 0 nie są zdolne do odtwarzania w stanie ustalonym liniowego sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 t$, czyli nie spełniają wymagań reprezentowanych przez ten sygnał.

Przykład 9.15.

Wyznaczyć wartość błędu statycznego w przypadku liniowego sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 t$, wprowadzonego na wejście układu regulacji o schemacie blokowym według rysunku 9.19. Przyjąć dane:

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$K = 4 \text{ [cm/V}_s\text{]}$$

$$K_z = 0,5 \text{ [cm/V}_s\text{]}$$

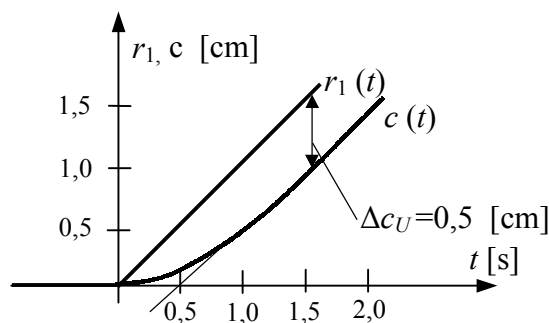
$$A_1 = 1 \text{ [cm/s]}$$

Wykorzystując ponownie wyniki przykładu 1 otrzymamy następujący wzór na błąd statyczny

$$\Delta c_u = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s R_1(s) \frac{1}{1 + K_z G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A_1}{s^2} \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K K_z} =$$

$$= \frac{A_1}{K K_z} = \frac{1}{4 \cdot 0,5} A_1 = 0,5 A_1 = 0,5 \text{ [cm]}$$

Zakładając przykładowo stabilny oraz inercyjny charakter odpowiedzi układu, można sporządzić wykres porównawczy pokazany na rysunku 9.22.



Rys. 9.22

Jak widać, w stabilnym stanie pracy, układy klasy 1 są zdolne do odtworzenia w stanie ustalonym liniowego sygnału sterującego $r_1(t) = A_1 t$ ze stałym błędem; zatem w ograniczonym zakresie spełniają wymagania reprezentowane przez sygnał liniowy.