1. Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \frac{5x+3}{1-|x|} + \sqrt{-2x^2+x+1}$$

Rozwiązanie:

$f(x)$ jest sumą funkcji wymiernej i pierwiastkowej; zatem pojawiają się warunki:

$$\begin{cases} 1-|x| \neq 0 \\ -2x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Warunki te muszą być spełnione równocześnie:

$$1-|x| \neq 0 \iff \sim(1-|x|=0)$$

$$\sim(1-x=0 \wedge x \geq 0) \vee$$

$$\sim(1+x=0 \wedge x<0)$$

$$\sim(x=1 \wedge x \geq 0) \vee \sim(x=-1 \wedge x<0)$$

$$\underline{x \neq 1 \vee x \neq -1}$$

$$-2x^2+x+1 \geq 0$$

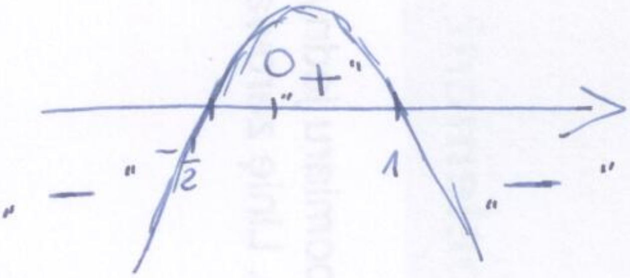
$$\Delta = 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 9$$

Rozwiązujemy: $-2x^2+x+1=0$

by ~~zna~~ znaleźć m-sce zerowe, później analizując własności fcji kwadratowej określamy znaki

$$x_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$$



Funkcja $-2x^2+x+1$ przyjmuje wartości nieujemne dla $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Do dziedziny funkcji $f(x)$ należą liczby $x \in \mathbb{R}$, które spełniają

$$\begin{cases} x \in [-\frac{1}{2}; 1] \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{D}_{f(x)} = [-\frac{1}{2}; 1)$$

2. Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{3 - \left|\frac{x+2}{x-1}\right|} - \frac{x-2}{\sqrt{|x-1|-4}}$$

Rozwiązanie:

f jest złożone z funkcji wymiernych i pierwiastkowych. Zapisujemy warunki na $x \in \mathbb{D}_f$:

$$\begin{cases} 3 - \left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \left.\begin{array}{l} \sqrt{|x-1|-4} \neq 0 \\ |x-1|-4 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x-1|-4 > 0 \end{cases}$$

Rozpatrujemy pierwszy warunek:

$$(P1) \begin{cases} 3 - \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \vee (P2) \begin{cases} 3 + \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} < 0 \end{cases}$$

z definicji wartości bezwzględnej

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

(P1) $\begin{cases} 3 - \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$ ← sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\begin{cases} \frac{3(x-1) - (x+2)}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

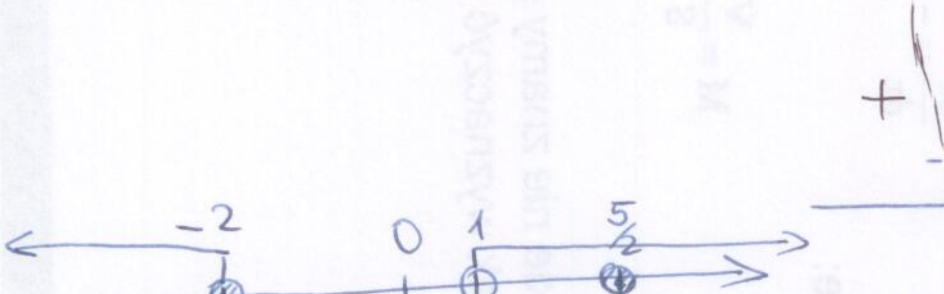
$$\begin{cases} \frac{3x - 3 - x - 2}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

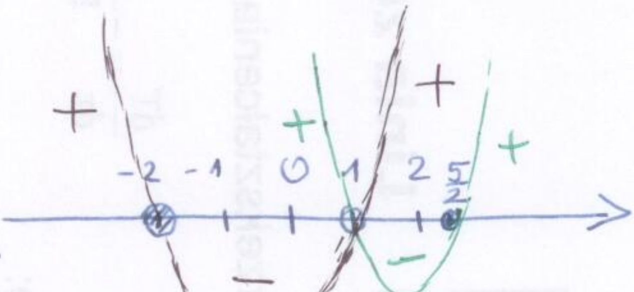
$$\begin{cases} \frac{2x - 5}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

Następnie korzystamy z własności ~~ktr~~ która mówi:

„Znak iloczynu jest taki sam jak znak ilorazu"

$$\begin{cases} 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-1) \geq 0 \\ (x+2)(x-1) \geq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad x \neq 1$$





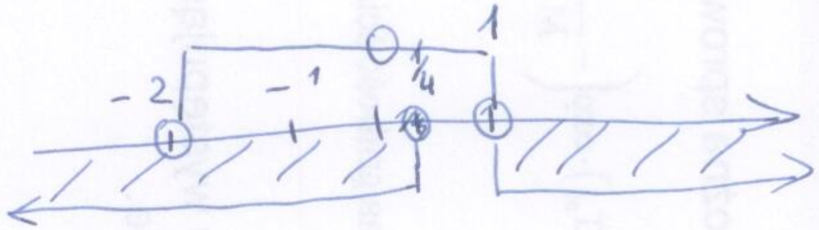
$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$

$$(P2)\begin{cases} 3 + \dfrac{x+2}{x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \end{cases}$$

Procedura rozwiązywania jak poprzednio:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-3+x+2}{x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x-1}{x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 4\left(x-\tfrac{1}{4}\right)(x-1) &\geqslant 0 \\ (x+2)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$



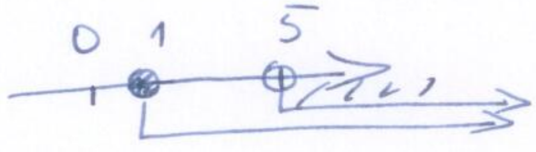
$$\underline{x \in \left(-2, \tfrac{1}{4}\right)}$$

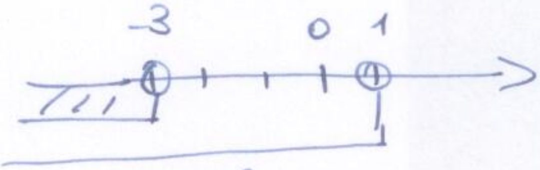
$$|x-1| - 4 > 0$$

$$\begin{cases} x-1-4 > 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -(x-1)-4 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -x-3 > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -3 \\ x < 1 \end{cases}$$





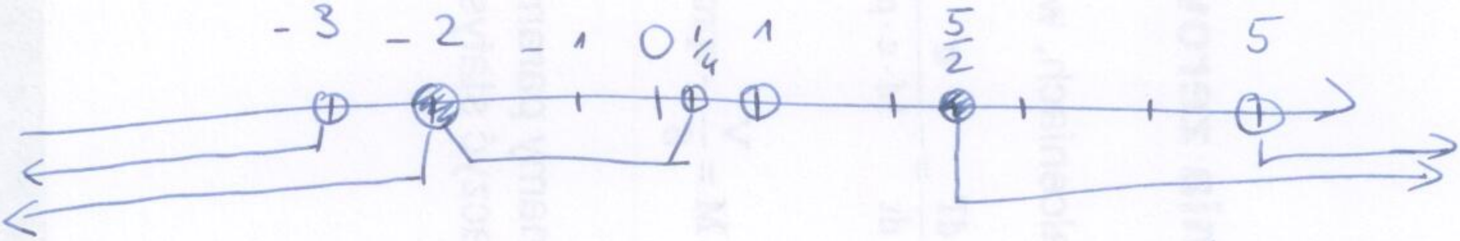
$x \in (5, +\infty)$ $\qquad$ $x \in (-\infty, -3)$

$$\Downarrow$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$$

Dziedzina jest zatem określona przez następujące warunki:

$$(P1) \vee (P2) \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{5}{2}; +\infty) \cup (-2; \frac{1}{4}) \\ x \neq 1 \\ x \in (-\infty; -3) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$



Wszystkie one spełnione są dla

$$\underline{x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)}$$

$\uparrow$

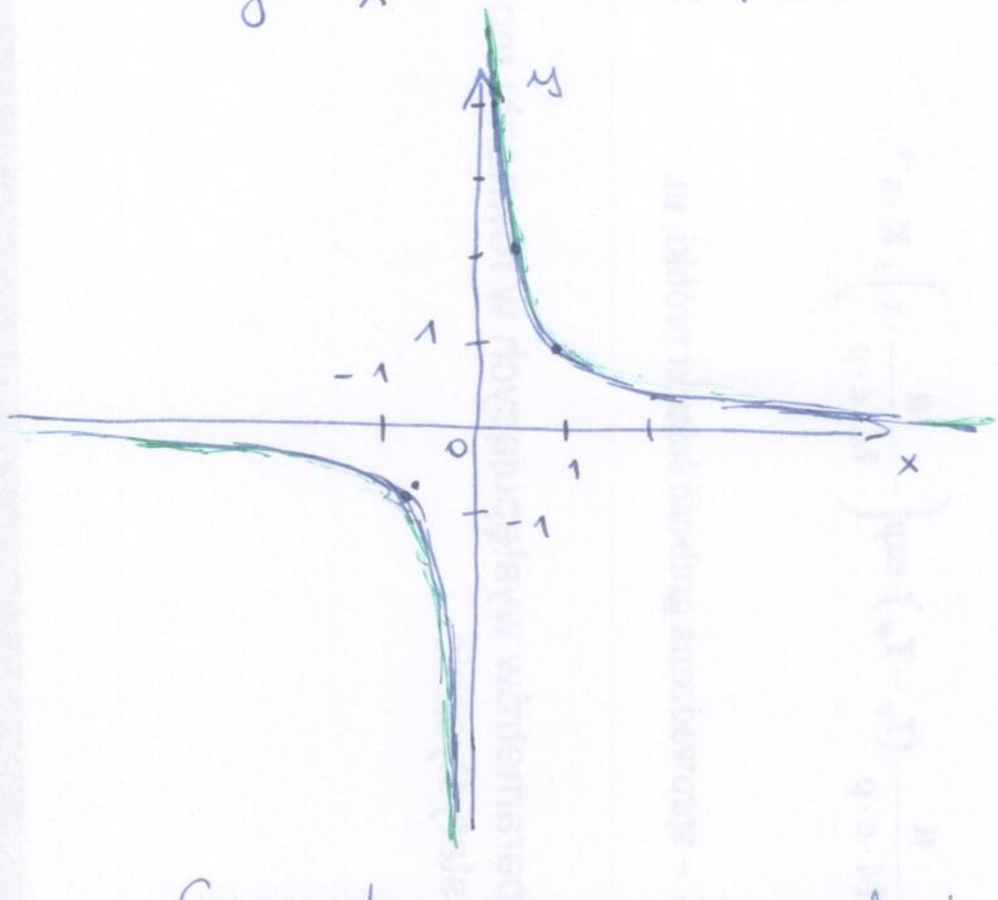
D_f

3. Przedstaw geometrycznie relację:

$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \cdot y = 1 \}$

W relacji tej są wszystkie punkty, których iloczyn równy jest 1.

$y = \frac{1}{x} \quad \wedge \quad x \neq 0$



Geometryczną prezentacją par punktów należących do relacji R są gałęzie hiperboli widocznej powyżej.

4. Przedstaw geometrycznie relację ρ:

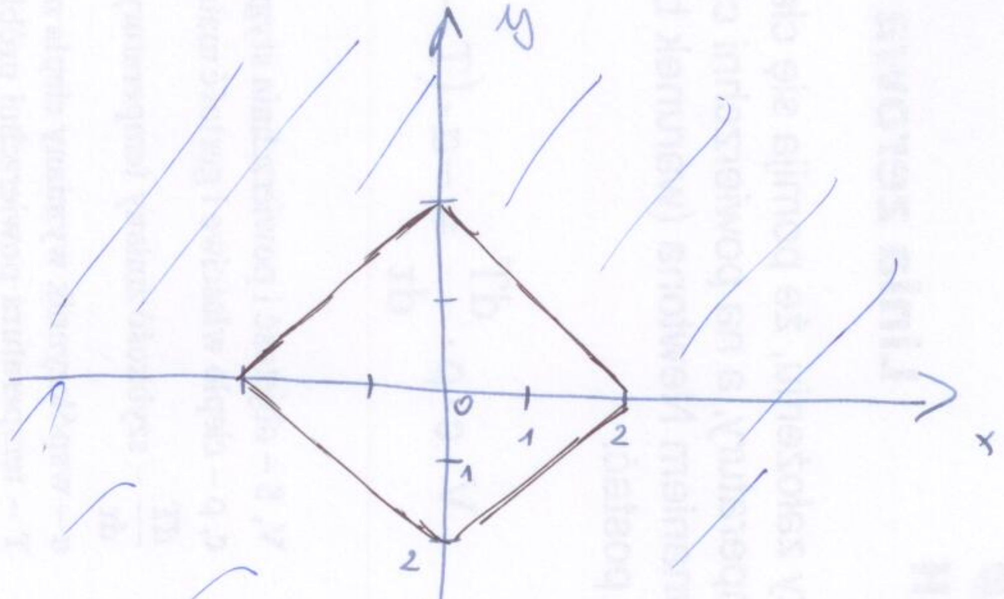
$$\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| + |y| > 2\}$$

Rozw. 1. Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ x - y > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ -x + y > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x - y > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -x + 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y < x - 2 \\ \cancel{y < x + 2} \\ x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y > x + 2 \\ x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y < -x - 2 \\ \cancel{y < -x + 2} \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

I ćwiartka   IV ćw   II ćw   III ćw



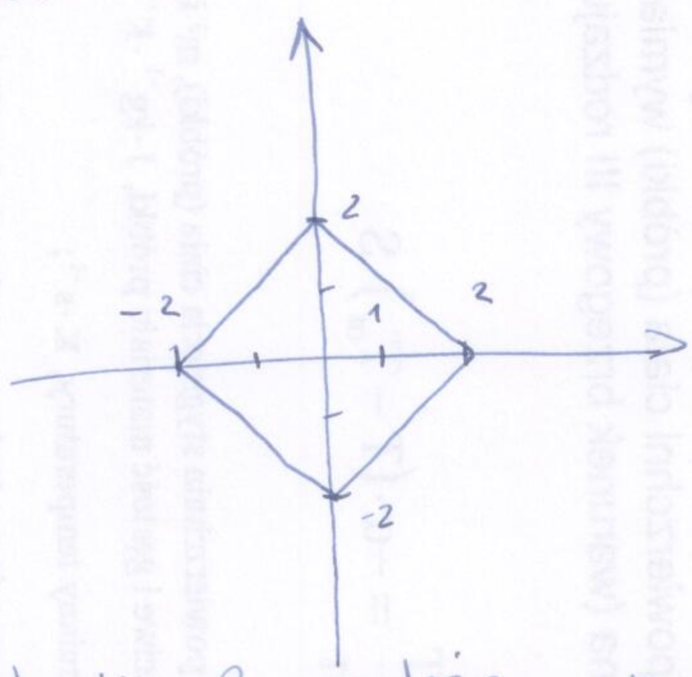
Do relacji ρ należą punkty spoza czarnego kwadratu (bez krawędzi).

Rozw. 2.

~~Wyrażenia~~ Interpretujemy sens wyrażenia

$$|x| + |y| = 2.$$

Są to wszystkie punkty, których suma odległości ~~od początku~~ współrzędnych od punktu O jest równa 2. To daje nam kwadrat



Do relacji ρ należą punkty, których suma odległości współrzędnych od O jest większa niż 2.

Zatem obszar na zewnątrz kwadratu (bez krawędzi).

5. Wyznacz dziedzinę:

$$f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x^2-2}\right)$$

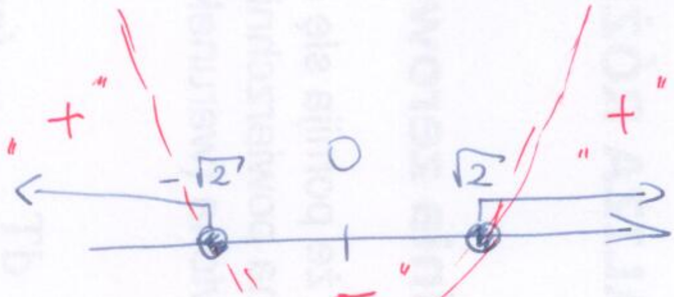
Funkcja f składa się z funkcji logarytmicznej oraz pierwiastkowej, stąd warunki, które musi spełniać $x \in \mathbb{D}_f$ są następujące:

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{x^2-2} > 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$\sqrt{x^2-2} > -1 \Leftrightarrow$ ten warunek spełniony jest dla $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 2 \geq 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$$



$$\mathbb{D}_f = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$$

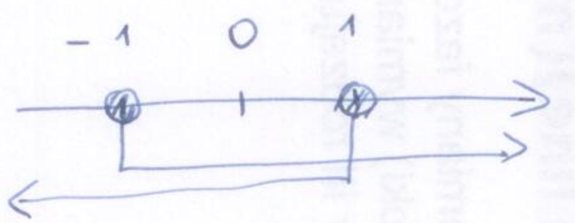
6. Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

Funkcja f jest sumą dwóch funkcji pierwiastkowych:

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

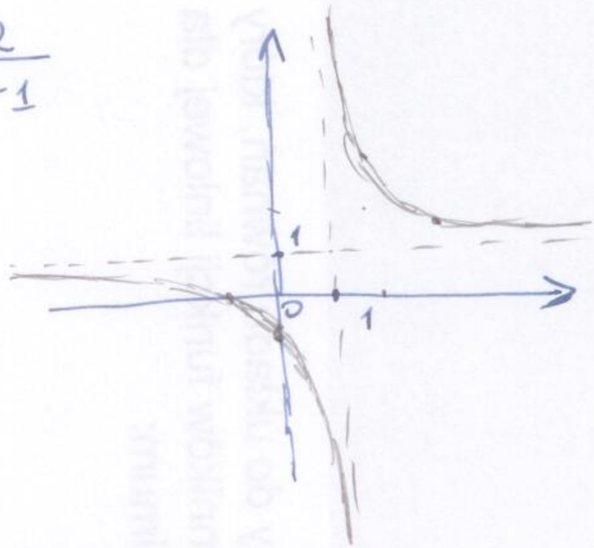


$$\mathbb{D}_f = [-1, 1]$$

7. Wyznacz funkcję odwrotną

$$y = \frac{x+1}{x-1} \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$



Rys. Zgrubny szkic przebiegu ~~fcji~~ y(x).

Funkcja jest różnowartościowa i jest „na" zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{C}_f$

Aby znaleźć fcję odwrotną należy wyznaczyć zależność $x(y)$:

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad \Big/ \cdot (x-1), \quad \text{w dziedzinie można}$$

$$y(x-1) = x+1$$

$$xy - y = x + 1$$

Przenosimy x-y na lewą stronę:

$$xy - x = y + 1$$

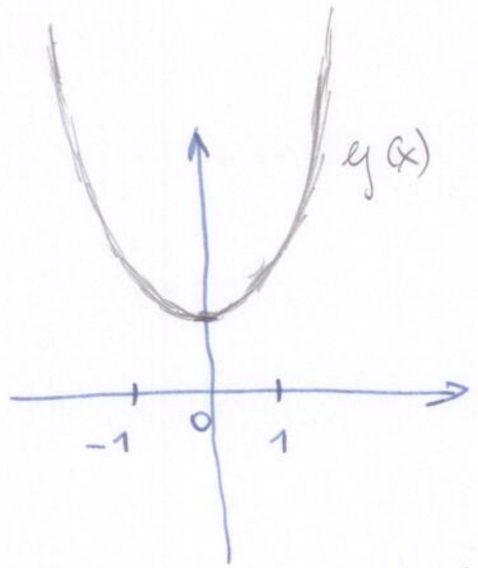
$$x(y-1) = y+1 \quad /:(y-1), \text{ w } D_f \text{ można}$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ jest funkcja $g(y) = \frac{y+1}{y-1}$.

8. Wyznacz funkcję odwrotną

$y = x^2 + 1$



Rys. Zgrubny szkic przebiegu $y(x)$.

Funkcja jest „na" zbiór $\mathbb{D}_f = [1, +\infty)$

nie jest jednak różnowartościowa

w dziedzinie naturalnej : $\mathbb{R}$.

Dla skonstruowania funkcji odwrotnej

ograniczamy dziedzinę

$y(x)$ do podprzedziału:

$\mathbb{D}_f = [0, +\infty)$:

Wyliczamy $x(y)$:

$y = x^2 + 1$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 1$

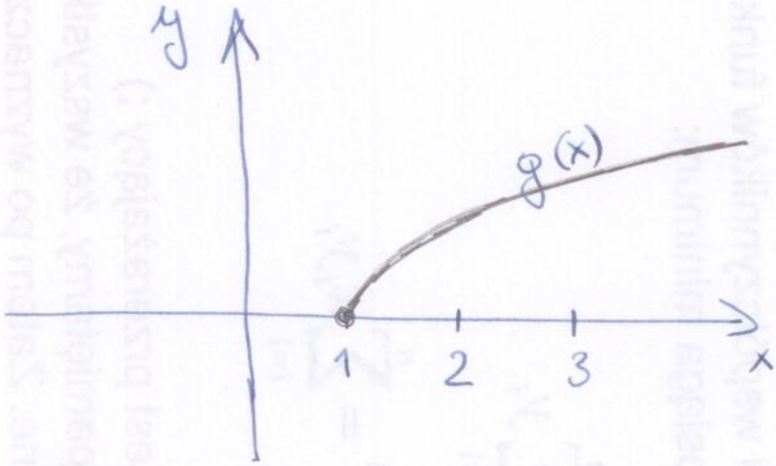
$x^2 = y - 1$

$x = \sqrt{y-1}$

$g(y) = \sqrt{y-1}$

$D_g = [1, +\infty)$

$\mathbb{D}_g^{-1}$...

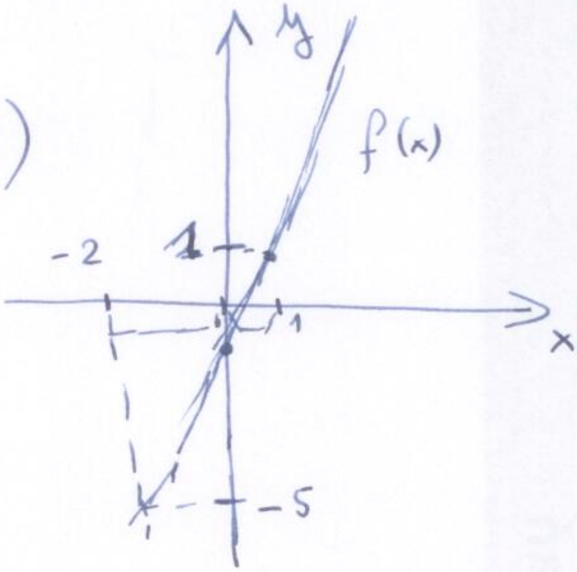


Rys. Szkic przebiegu funkcji odwrotnej

9. Znajdź obraz funkcji

$f(x) = 2x - 1$

$f([-2;0) \cup (0,1])$



Obrazem zbioru $[-2;0) \cup (0,1]$

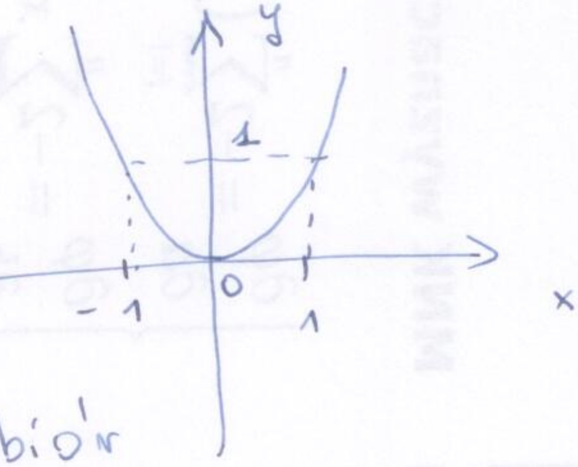
~~je~~ w funkcji f jest :

$[-5;-1)\ (-1,1]$

10. Znajdź obraz

$f(x) = x^2$

$f([-1,1])$



Obrazem zbioru $[-1,1]$

w funkcji f jest zbiór

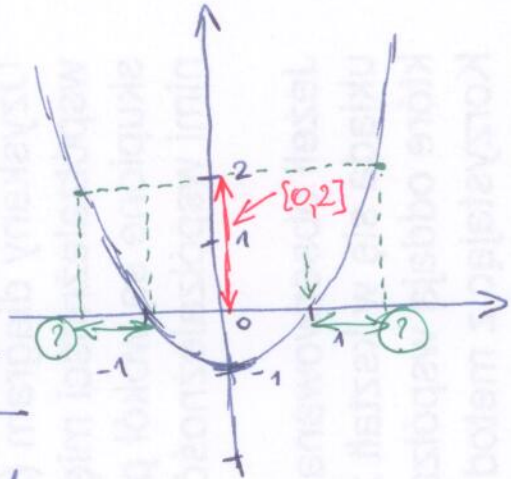
$[0,1]$.

11. Znajdź przeciwobraz

$f^{-1}([A]) = \{x \in X : f(x) \in A\}$

$f(x) = x^2 - 1$

$f^{-1}([0,2]) = ?$



$f(x = ?) = 2$

$x^2 - 1 = 2$

$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \lor x - \sqrt{3}$

$f(x) = 0 \iff x = -1 \lor x = 1$

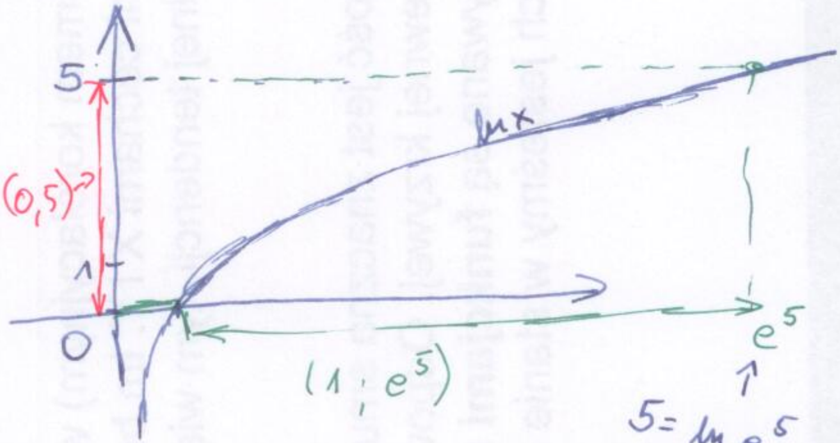
$f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{3}; -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

12. Znajdź przeciwobraz

$f(x) = \ln x$

$f^{-1}((0,5)) =$

$= (1; e^5)$

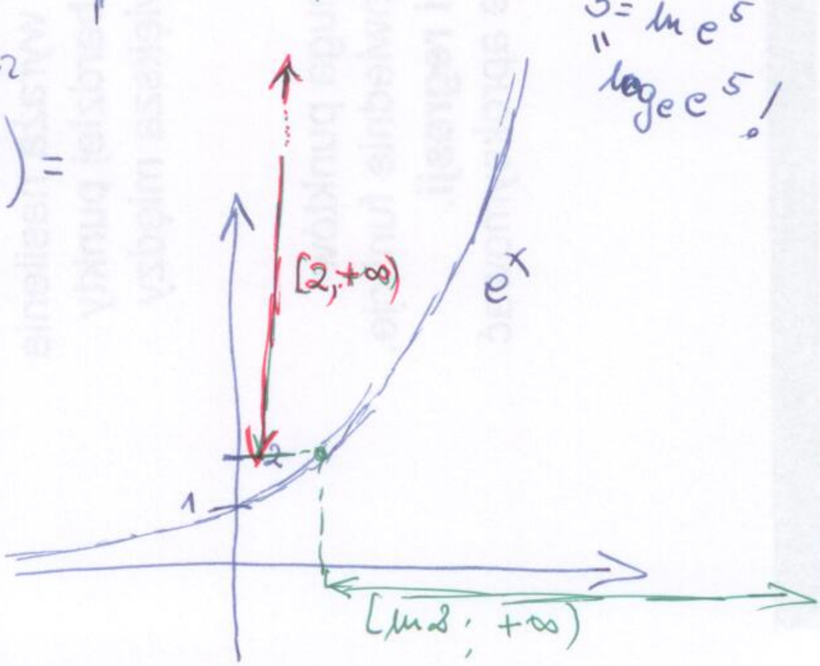


$5 = \ln e^5 = \log_e e^5$!

13. Znajdź przeciwobraz

$f(x) = e^x, \quad f^{-1}([2; +\infty)) =$

$= [\ln 2; +\infty)$



14. Udowodnij prawdziwość twierdzenia w zbiorze liczb naturalnych:

$T(n):\ 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dla dowodu korzystamy z zasady indukcji matematycznej:

1. $T(1)$:

$L = 1$

$P = \frac{(1+1)\cdot 1}{2} = 1$

2. Założenie indukcyjne:

$T(n)$ jest prawdziwe

Teza indukcyjna:

$T(n+1)$ jest prawdziwe

Dowód indukcyjny

$\cancel{P = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

$L = 1+2+\ldots+n+(n+1) =$ (korzystamy z zał. indukcyjnego)

$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} =$

$= \frac{n+1}{2}(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P$

3. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykazaliśmy prawdziwość twierdzeń $T(n)$ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

KONIEC DOWODU.

15. Udowodnij prawdziwość wzoru na sumę n-wyrazów ciągu arytmetycznego:

Wzór, którego prawdziwość dowodzimy

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n$$

Dla dowodu konieczne jest przywołanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego: ~~oraz~~

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

oraz

zasada indukcji matematycznej.

1. Sprawdzamy dla S_1

$$L\cancel{S_n} = a_1$$

$$P = \frac{2 \cdot a_1 + (1-1)r}{2} \cdot 1 = \frac{2a_1}{2} = a_1$$

2. Założenie indukcyjne:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Teza indukcyjna:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = \frac{2a_1 + n \cdot r}{2} \cdot (n+1)$$

Dowód indukcyjny:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \left\{ \text{Korzystamy z założenia indukcyjnego} \right\} =$$

$$= \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n + a_{n+1} = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n + a_1 + n \cdot r =$$

$$= \frac{2a_1 + nr - r}{2} \cdot n + \frac{2a_1 + 2nr}{2} =$$

$$= \frac{2na_1 + n^2 r - nr + 2a_1 + 2nr}{2} =$$

$$= \frac{2a_1(n+1) + r(n^2+n)}{2} = \frac{2a_1(n+1) + rn(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{2a_1 + rn}{2}(n+1) = P$$

3. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykazaliśmy, że wzór na sumę n-kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego jest prawidłowy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

16. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x+3}{x-3} > \frac{x-1}{x+5}$$

Dziedzina

$x \neq 3 \wedge x \neq -5$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-1}{x+5} > 0$$

$$\frac{(x+3)(x+5) - (x-1)(x-3)}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\frac{x^2+8x+15-(x^2-4x+3)}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\frac{x^2+8x+15-x^2+4x-3}{(x-3)(x+5)} > 0$$

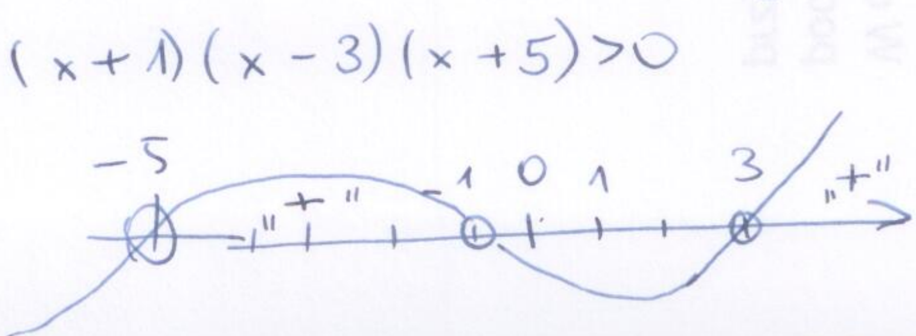
$$\frac{12x+12}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\frac{12(x+1)}{(x-3)(x+5)} > 0$$

Znak nierówności zależy zarówno od znaku wyrażeń w mianowniku jak i w liczniku.

Znak lewej strony będzie taki sam jak znak iloczynu:

$$12(x+1)(x-3)(x+5) > 0$$



Rysowanie wykresu rozpoczynamy od strony prawej. Zaczynamy od „góry", gdyż iloczyn współczynników ~~ze~~ przy x-ach jest dodatni.

Wybieramy te podobszary, gdzie wykres jest ponad osią.

Rozwiązaniem nierówności jest zatem ~~prz~~ zbiór:

$x \in (-5; -1) \cup (3; +\infty)$

17. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x} < 0$$

DZIEDZINA:

$x^2-5x \neq 0$

$x(x-5) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 5$

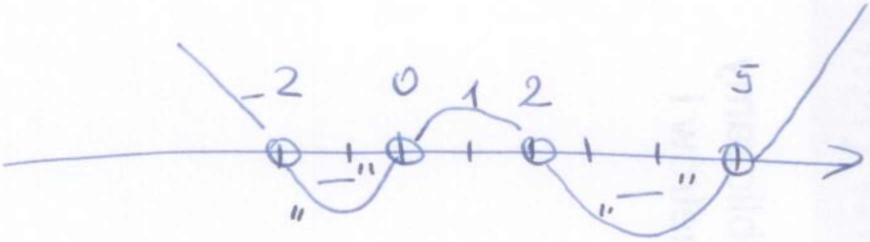
Rozwiązanie na podstawie zasady:

„Znak iloczynu jest taki sam jak znak ilorazu"

$(x^2-4)(x^2-5x) < 0$

Zapisujemy w postaci iloczynowej:

$x(x-2)(x+2)(x-5) < 0$



Rozwiązaniem jest zbiór:

$x \in (-2; 0) \cup (2; 5)$

18. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{5x-3}{2x+7}\right| < 2$$

Dziedzina : $2x + 7 \neq 0$

$x \neq -\frac{7}{2}$

Rozw. 1

Zadanie powyższe można rozwiązywać bezpośrednio korzystając z definicji wartości bezwzględnej:

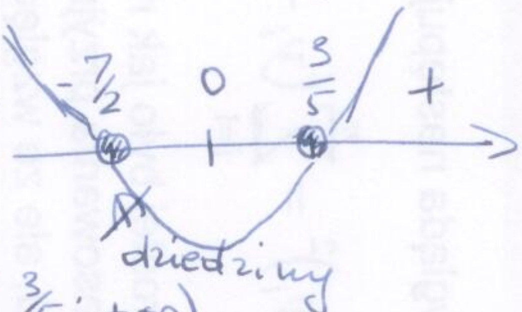
$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{2x+7} < 2 \\ \dfrac{5x-3}{2x+7} \geq 0 \end{cases} \; (P1) \quad \vee \quad \begin{cases} -\left(\dfrac{5x-3}{2x+7}\right) < 2 \\ \dfrac{5x-3}{2x+7} < 0 \end{cases} \; (P2)$$

P1:

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{2x+7} - 2 < 0 \\ 2 \cdot 5\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$$

← znak iloczynu identyczny jak znak ilorazu

$$10\left(x - \tfrac{3}{5}\right)\left(x + \tfrac{7}{2}\right) \geq 0$$



$$x \in \left(-\infty; -\tfrac{7}{2}\right) \cup \left[\tfrac{3}{5}; +\infty\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{2x+7} - \dfrac{4x+14}{2x+7} < 0 \\ x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{5}; +\infty\right) \end{cases}$$

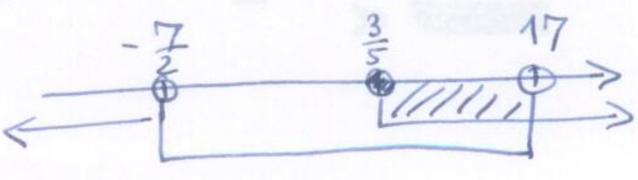
$$\begin{cases} \dfrac{x-17}{2x+7} < 0 \Rightarrow 2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 17) < 0 \\ x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{5}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \left(-\tfrac{7}{2}; +17\right)$$

ostatecznie dla P1:

$$x \in \left[\tfrac{3}{5}; 17\right)$$

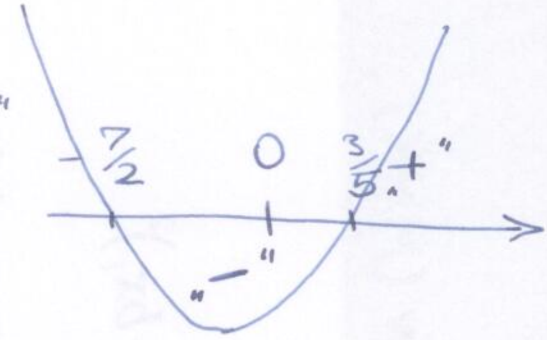


P2:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{5x-3}{2x+7}\right) < 2 \quad / \cdot (-1) \\ \dfrac{5x-3}{2x+7} < 0 \end{cases}$$

Zmiana znaku nierówności!

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{2x+7} > -2 \\ 10\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

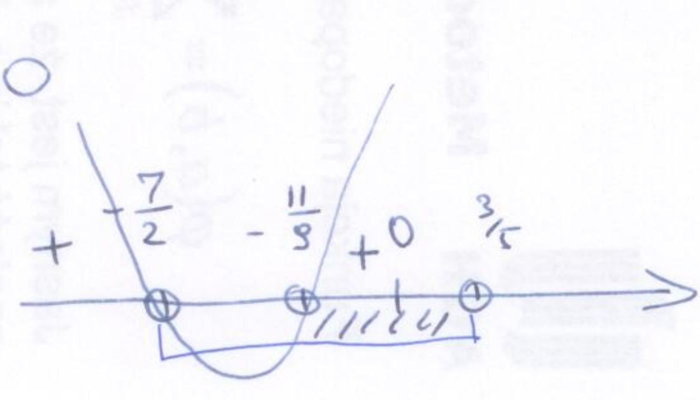


$$\begin{cases} \dfrac{5x-3}{2x+7} + \dfrac{2(2x+7)}{2x+7} > 0 \\ x \in \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x-3+4x+14}{2x+7} > 0 \\ x \in \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{9x+11}{2x+7} > 0 \\ x \in \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18\left(x+\frac{11}{9}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right) > 0 \\ x \in \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$



dla P2:

$$x \in \left(-\frac{11}{9}; \frac{3}{5}\right)$$

Ostatecznie rozwiązaniem jest suma przedziałów wyznaczonych w przypadku P1 i P2:

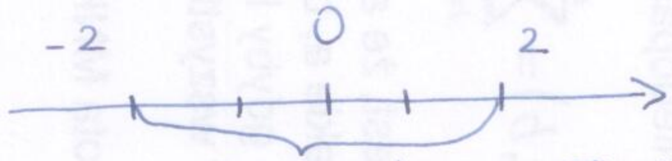
$$\underline{x \in \left(-\frac{11}{8}; 17\right)}$$

Rozw. 2.

Zastanówmy się nad znaczeniem notacji:

$$\underline{\underline{|a| < 2}}$$

Oznacza ona, że liczba a jest odległa od 0 o ~~nie więcej~~ mniej niż 2. Warunek ten spełniają zatem liczby



te liczby spełniają warunek

$$-2 < a < 2$$

co można zapisać jako koniunkcję warunków:

$$\begin{cases} a < 2 \\ a > -2 \end{cases}.$$

Przez analogię:

$$\left|\frac{5x-3}{2x+7}\right| < 2 \iff \begin{cases} \frac{5x-3}{2x+7} < 2 \\ \frac{5x-3}{2x+7} > -2 \end{cases}$$

Te dwie nierówności rozwiązujemy

równocześnie:

$$\begin{cases} \frac{5x-3}{2x+7} - 2 < 0 \\ \frac{5x-3}{2x+7} + 2 > 0 \end{cases}$$

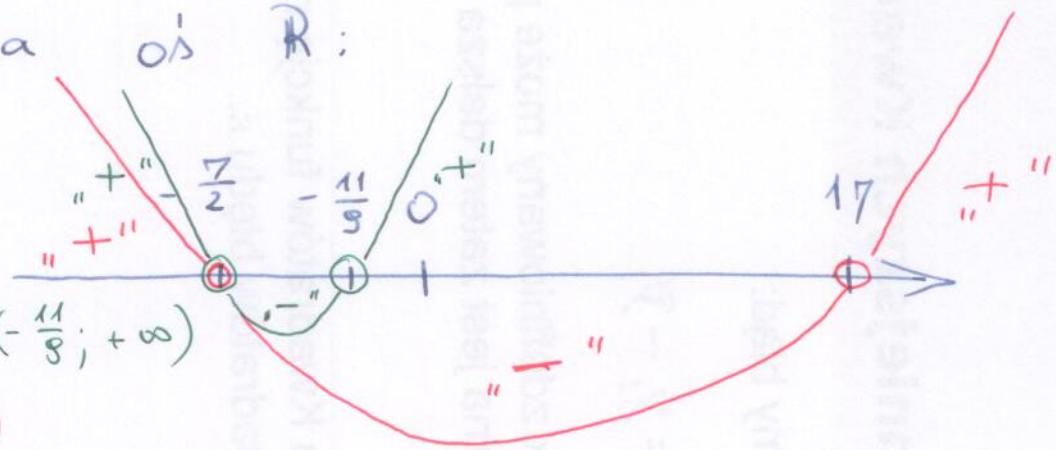
$$\begin{cases} \frac{5x-3-2(2x+7)}{2x+7} < 0 \\ \frac{5x-3+2(2x+7)}{2x+7} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-17}{2x+7} < 0 \\[2ex] \dfrac{9x+11}{2x+7} > 0 \end{cases}$$

Badamy znaki iloczynów

$$\begin{cases} 2(x-17)\left(x+\frac{7}{2}\right) < 0 \\ 18\left(x+\frac{11}{9}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

Przebiegi wielomianów nanosimy na oś $\mathbb{R}$:



$x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{11}{9}; +\infty\right)$

$x \in \left(-\frac{7}{2}; 17\right)$

Rozwiązaniem jest część wspólna tych zbiorów:

$$x \in \left(-\frac{11}{9}; 17\right).$$

Opracował:
DR Paweł Leszek Żak

Kraków, 10 I 2013 r.