1. Rozwiąż równanie

$$\log_3\left(4-\frac{1}{5}x\right)=2$$

Dziedzina

$$4-\frac{1}{5}x>0$$

$$-\frac{1}{5}x>-4 \quad /\cdot(-5)$$

$$\underbrace{x<20}$$

$$\log_3\left(4-\frac{1}{5}x\right)=2$$ ← logarytmy o tej samej podstawie

$$\log_3 3^2=2$$

$$\log_3\left(4-\frac{1}{5}x\right)=\log_3 9$$

Korzystamy z różnowartościowości funkcji logarytmicznej

$$4-\frac{1}{5}x=9$$

$$-\frac{1}{5}x=5 \quad /\cdot(-5)$$

$$\underbrace{x=-25}$$

rozwiązanie należy do dziedziny.

2. Rozwiąż równanie

$$2\log_3(x-3) - \log_{\frac{1}{9}}(x-3) = 5$$

D: $\quad x-3>0$

$\underline{x>3}$ $\qquad D=(3;+\infty)$

Te same podstawy logarytmu

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(x-3) = \frac{\log_3(x-3)}{\log_3\frac{1}{9}} = \frac{\log_3(x-3)}{\log_3 3^{-2}} = -\frac{1}{2}\log_3(x-3)$$

$$2\log_3(x-3) + \frac{1}{2}\log_3(x-3) = 5$$

$$\frac{5}{2}\log_3(x-3) = 5 \quad /:\cancel{5}\ \frac{5}{2}$$

$$1\ \log_3(x-3) = 1$$

Sposób 1

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

W naszym wypadku $\quad a=3$

$b=x-3$

$c=1$

$$x-3 = 3^1$$

$$x=6 \in D$$

sposób 2. (klasycznie)

$\log_3 (x-3) = 1$

sprowadzamy do logarytmów o identycznych podstawach:

$\log_3 (x-3) = \log_3 3$

Korzystamy z różnowartościowości:

$x-3=3$

$\underline{x=6}$ - wartość należy do $\mathbb{D}$.

3. Rozwiąż równanie:

$2\log_{x-3} 3 = 2$

$\mathbb{D}$: $x-3>0 \wedge x-3 \neq 1$

$x>3 \wedge x \neq 4$

$\mathbb{D} = (3;+\infty) \setminus \{4\} = (3;4) \cup (4;+\infty)$

opisy są równoważne

$2\log_{x-3} 3 = 2 \quad /:2$

$\log_{x-3} 3 = 1$

Korzystamy z def. logarytmu

$3 = (x-3)^1$

$\underline{x=6} \in \mathbb{D}$.

4. Rozwiąż równanie

$$9^{2x+3} = 3\sqrt{27}$$

Sprowadzamy do tych samych podstaw:

$$9 = 3^2 \; ; \quad 3 = 3^1 \; ; \quad \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3^{2(2x+3)} = 3^1 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$$

Korzystamy z własności potęgowania:

$$\cancel{3^{4x+6}} \quad 3^{4x+6} = 3^{\frac{5}{2}}$$

Korzystamy z różnowartościowości

$$4x + 6 = \frac{5}{2}$$

$$4x = \frac{5}{2} - \frac{12}{2}$$

$$4x = -\frac{7}{2} \quad / : 4$$

$$x = -\frac{7}{8}$$

5. Rozwiąż równanie

$$2^{x+3} + 2^x = 72$$

Rozkładamy 72 na czynniki pierwsze

$$\left.\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$2^{x+3} + 2^x = 72$$

$$2^3 \cdot 2^x + 2^x = 2^3 \cdot 3^2$$

$$2^x \underbrace{(2^3+1)}_{9} = 2^3 \cdot \underbrace{3^2}_{9} \quad /:9$$

$$2^x = 2^3$$

Korzystamy z różnowartościowości:

$$\underline{x=3}$$

6. Rozwiąż równanie:

$$2^{2x-4} - 5 \cdot 2^{x-1} + 16 = 0$$

Powyższe równanie rozwiążemy, korzystając z własności trójmianu kwadratowego.

Zauważmy, że:

$$2^{-4} \cdot 2^{2x} - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{x} + 16 = 0$$

można przekształcić do postaci

$$\frac{1}{16} \cdot \left[2^{x}\right]^{2} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x} + 16 = 0$$

Funkcja zawierająca zmienną niezależną x jest postaci 2^x. Zależność od x nie pojawia się w innych miejscach.

Pamiętając o właściwościach ~~zmiennej~~ funkcji wykładniczej podstawiamy nową zmienną:

$t = 2^x \quad \wedge \quad t > 0$, gdyż zbiór wartości fcji wykładniczej to liczby od zera większe

Po podstawieniu otrzymamy równanie

$\frac{1}{16}t^2 - \frac{5}{2}t + 16 = 0 \quad /\cdot 16$ // dla uzyskania liczb $\mathbb{Z}$

$t^2 - 40t + 256 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4\cdot 1\cdot 256 = 576$ $\quad \sqrt{576} = 24$

$t_1 = \frac{40-24}{2} = 8$

$t_2 = \frac{40+24}{2} = 32$

t_1 oraz t_2 spełniają warunek $t>0$

Rozwiązujemy dwa równania

$2^x = 8 \quad \vee \quad 2^x = 32$

$2^x = 2^3 \quad \vee \quad 2^x = 2^5$

Korzystamy z różnowartościowości

Rozwiązaniami są $x=3 \vee x=5$.

7. Rozwiąż równanie

$3^{2-x} = 5^{x-2}$

Próbujemy sprowadzić do potęgi o tej ~~samym~~ samej podstawie

$3^{-(x-2)} = 5^{x-2} \quad /\cdot 3^{(x-2)}$

$$1 = 5^{(x-2)} \cdot 3^{(x-2)}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$1 = 15^{(x-2)}$$

$$15^0 = 15^{(x-2)}$$

Różnowartościowość

$$x - 2 = 0$$

$$\underline{x = 2}$$

8. Rozwiąż równanie

$$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$$

Podstawy potęg są różne. Rozkładamy je na czynniki pierwsze, by znaleźć wspólną wartość, która może być wybrana podczas sprowadzania równości do postaci, w której mamy taką samą podstawę w każdym wyrażeniu.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$16 = 2^4$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$81 = 3^4$

$$3 \cdot 2^{4x} + 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{4x}$$

Wybieramy jedną z potęg i wykonujemy dzielenie wyrazem o największym wykładniku. Niech będzie to 2^{4x}

$$3 + \frac{3^{2x}}{2^{2x}} = 2 \cdot \frac{3^{4x}}{2^{4x}}$$

$$3 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{4x}$$

Znowu mamy $\left(\frac{3}{2}\right)^{4x} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right]^2$

$$-2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right]^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

Nowa zmienna $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \wedge t > 0$

$$-2t^2 + t + 3 = 0$$

Równanie to można rozwiązać przy pomocy wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$\Delta = 1 - 4(-2) \cdot 3 = 1 + 24 = 25$

$t_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$t_2 = \frac{-1+5}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$ jest mniejsze od zera. Nie może być rozwiązaniem.

Wracamy do zmiennej x:

$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

9. Rozwiąż:

$(0.125)^x \geq 4^{x-3}$

Te same podstawy: $\left(\frac{1}{2^3}\right)^x \geq 2^{2(x-3)}$

$2^{-3x} \geq 2^{2x-6}$, Znak nierówności pozostaje bez zmian

$-3x \geq 2x - 6$

$-5x \geq -6 \quad | : (-5)$

$x \leq \frac{6}{5}$

10. Rozwiąż:

$$4(\sqrt{8})^{x-3} \leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{16}\right)^{1-x}$$

Ta sama podstawa

$$2^2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^4}\right)^{1-x}$$

$$2^2\left(2^{\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}}\right) \leq \left(\cancel{2^{\frac{3}{2}}}\left(2^{\frac{3}{2}-4}\right)\right)^{1-x}$$

$$2^{\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}} \leq \left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{1-x}$$

$$2^{\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}} \leq 2^{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}x}$$

Znak nierówności bez zmian

$$\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} \leq -\frac{5}{2}+\frac{5}{2}x$$

$$\underline{x \leq 0}$$

11. Rozwiąż:

$$2^{2x+1} - 3\cdot 2^{x+1} + 4 \leq 0$$

$$2\cdot 2^{2x} - 3\cdot 2\cdot 2^{x} + 4 \leq 0$$

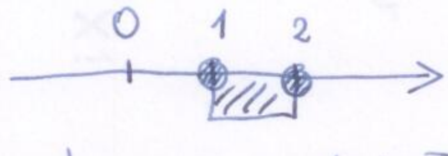
$$2\cdot[2^x]^2 - 6\cdot 2^x + 4 \leq 0$$

Podstawiamy $t = 2^x$, pamiętając $t>0$

$$2t^2 - 6t + 4 \leq 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 2\cdot 4 = 36 - 32 = 4$$

$t_1 = \frac{6-2}{4} = 1$ $\qquad$ $t_2 = \frac{8}{4} = 2$



$t \in [1,2]$, ten przedział równoważny jest koniunkcji warunków

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 2 \end{cases}$$

Wracamy do zmiennej x:

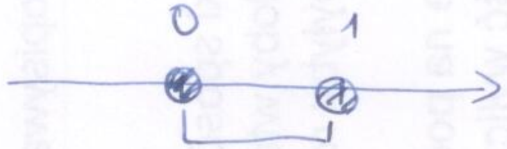
$$\begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \leq 2 \end{cases}$$

Przekształcamy do potęg o tych samych podstawach

$$\begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x \leq 2^1 \end{cases}$$

znaki nierówności zachowują się

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



$\underline{x \in [0, 1]}$

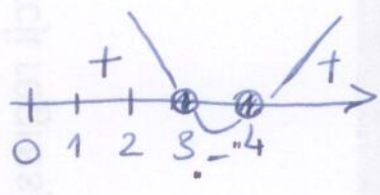
12. Rozwiąż:

$$5^{x^2-7x+12} \geq 5^0$$

$$x^2 - 7x + 12 \geq 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{8}{2} = 4$$



$$x \in \mathbb{R} \setminus (3, 4)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)}$$

13. Rozwiąż:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} > \frac{1}{32}$$

, zwykle w tego typu zadaniach: fcja wykładnicza, nie ma kłopotu z dziedzin

W naszym przypadku w wykładniku znajduje się f-cja wymierna. Musimy założyć, iż jej mianownik różny jest od zera:

$$x-1\neq 0 \qquad \underline{x\neq 1} \qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Dalej rozwiązujemy standardowo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$, zmieniamy znak nierówności na przeciwny.

$$\frac{x+1}{x-1} < 5$$

$$\frac{x+1}{x-1} - 5 < 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{5(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\frac{x+1-5x+5}{x-1} < 0$$

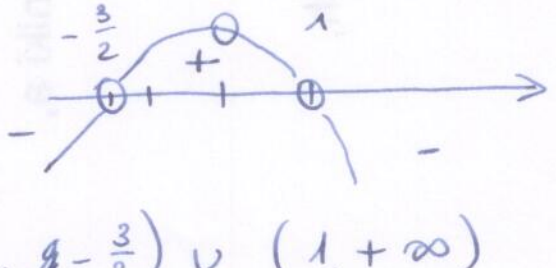
$$\frac{-4x+6}{x-1} < 0$$, badamy znak iloczynu

$$(-4x+6)(x-1)<0$$ wyłączam znaki przy x-ach

$$-4\left(x+\frac{6}{4}\right)(x-1)<0$$

$x_1 = -\frac{3}{2}$

$x_2 = 1$



$$\underline{x\in\left(-\infty, \cancel{1}-\frac{3}{2}\right)\cup(1,+\infty)}$$

14. Rozwiąż:

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$$

$$9 \cdot 3^x + 7^x < \cancel{4}\,\frac{4}{7} \cdot 7^x + \frac{34}{3} \cdot 3^x \qquad /:3^x$$

$$3^x > 0$$

$$9 + \left(\frac{7}{3}\right)^x < \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^x + \frac{34}{3}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{7}{3}\right)^x < \frac{34}{3} - \frac{27}{3}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{3}\right)^x < \left(\frac{7}{3}\right) \qquad /\cdot\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x < \left(\frac{7}{3}\right)^2$$, znak nierówności pozostaje ten sam:

$$x < 2$$

Uwaga! Wybór fcji 3^x, w alternatywie do 7^x podyktowany był chęcią uproszczenia dalszych obliczeń: $\frac{7}{3} > 1$, $\frac{3}{7} \in (0,1)$. Nie wpływa to jednak w żaden sposób na wynik.

15. Rozwiąż:

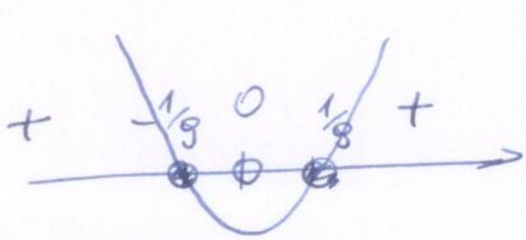
$$\log_{1/3} x^2 \le 4 \qquad x^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\log_{1/3} x^2 \le \log_{1/3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^4$$ zmiana znaku nierówności

$$x^2 \ge \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$x^2 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \ge 0$$

$$\left[x - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right]\left[x + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right] \ge 0$$



$$x \in \left(-\infty; -\tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{1}{9}; +\infty\right)$$

16. Rozwiąż:

$$\log_{3x-3} 16 < 2$$

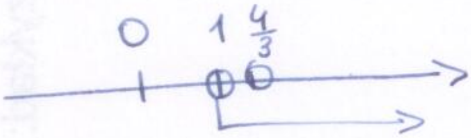
$$\log_{3x-3} 4^2 < 2$$

sprowadzamy do identycznych podstaw

$$\log_{3x-3} 4^2 < \log_{3x-3} (3x-3)^2$$

D: $\begin{cases} 3x-3 \neq 1 \\ 3x-3 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x \neq 4 \quad /:3 \\ 3x > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \frac{4}{3} \\ x > 1 \end{cases}$



$$\underline{x \in \left(1; \tfrac{4}{3}\right) \cup \left(\tfrac{4}{3}; +\infty\right)}$$

D

Należy rozważyć dwa przypadki:

$$\begin{cases} 3x-3 > 0 \ \wedge \ 3x-3 < 1 \\ 4^2 > (3x-3)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-3 > 1 \\ 4^2 < (3x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 3 \\ 3x < 4 \\ 4^2 - (3x-3)^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x > 4 \\ 4^2 - (3x-3)^2 < 0 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{4}{3} \\ (4 - 3x + 3)(4 + 3x - 3) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ (4 - 3x + 3)(4 + 3x - 3) < 0 \end{cases}$$

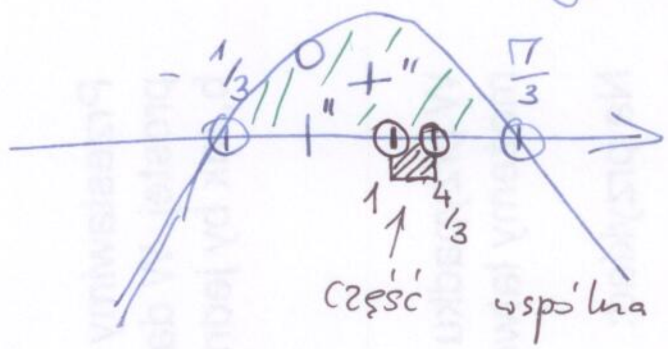
$$\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{4}{3} \\ (-3x+7)(3x+1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ (-3x+7)(3x+1) < 0 \end{cases}$$

wyłączam współczynniki:

$$\begin{cases} -9\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0 \\ x > 1 \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} -9\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) < 0 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

P1 P2

P1 $x = \frac{7}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$, znak współczynnika przy najwyższej potędze „–"

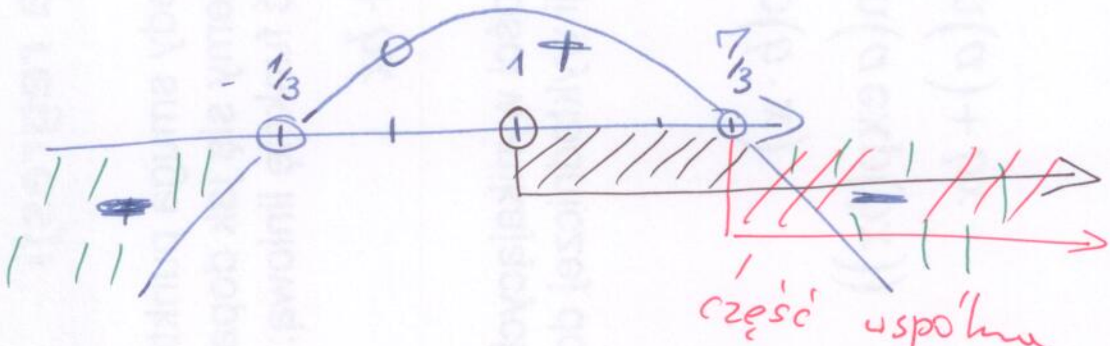


$x \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$

P2

Miejsca przecięcia osi OX:

$x = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{7}{3}$; znak: „–"



$x > \frac{7}{3}$

Ostatecznie:

$x \in \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$

17. Rozwiąż

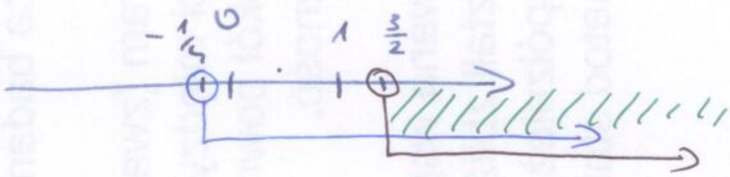
$$\log_{1/3}(4x+1) > -2 - \log_{1/3}(2x-3)$$

Dziedzina:

$$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$$

Zadanie spełniają „x"-y, które należą do rozwiązania obu nierówności.

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\mathbb{D} = \left(\tfrac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\log_{1/3}(4x+1) > \log_{1/3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2} - \log_{1/3}(2x-3)$$

$$\log_{1/3}(4x+1) > \log_{1/3}\left(\frac{1}{9(2x-3)}\right)$$ zmiana znaku nierówności

$$4x+1 < \frac{1}{9(2x-3)}$$

Wszystko na lewą stronę, by porównać do zera

$$4x+1 - \frac{1}{9(2x-3)} < 0$$

$$\frac{9(4x+1)(2x-3) - 1}{9(2x-3)} < 0$$

$$\frac{9(8x^2 - 10x - 3) - 1}{9(2x-3)} = \frac{72x^2 - 90x - 27 - 1}{9(2x-3)} < 0$$

$$\frac{72x^2 - 90x - 28}{9(2x-3)} < 0$$

Określamy znak iloczynu

$9(2x-3)(72x^2-90x-28)<0$

$ax^2 - bx - c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta = 8100 - 8064 = 36$

$x_1 = \frac{90-6}{144} = \frac{74}{144}$

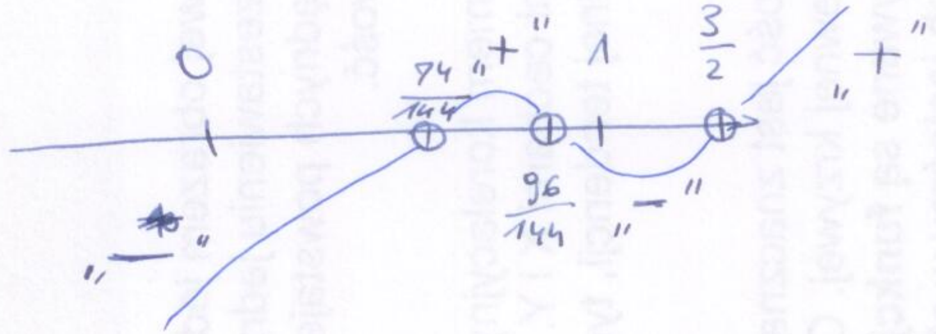
$x_2 = \frac{96}{144}$

Nie koniecznie chce nam się bawić z uproszczeniami :)

$2\cdot 9\cdot \underbrace{72}_{a}\underbrace{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\underbrace{\left(x-\frac{74}{144}\right)}_{(x-x_1)}\underbrace{\left(x-\frac{96}{144}\right)}_{(x-x_2)}<0$

~~zera~~ wielomian zeruje się dla

$x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{74}{144}$; $x\ \frac{96}{144}$, znak najwyższej potęgi „+"



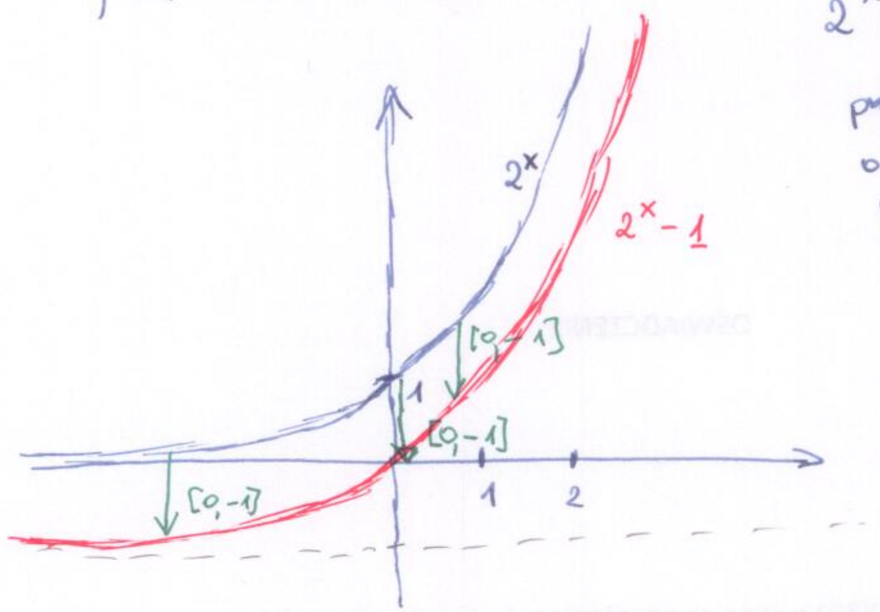
$x\in\left(-\infty;\frac{74}{144}\right)\cup\left(\frac{96}{144};\frac{3}{2}\right)$

18. Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = 2^x - 1$$

$2^x \longrightarrow f(x)$

przesunięty o wektor $[0, -1]$



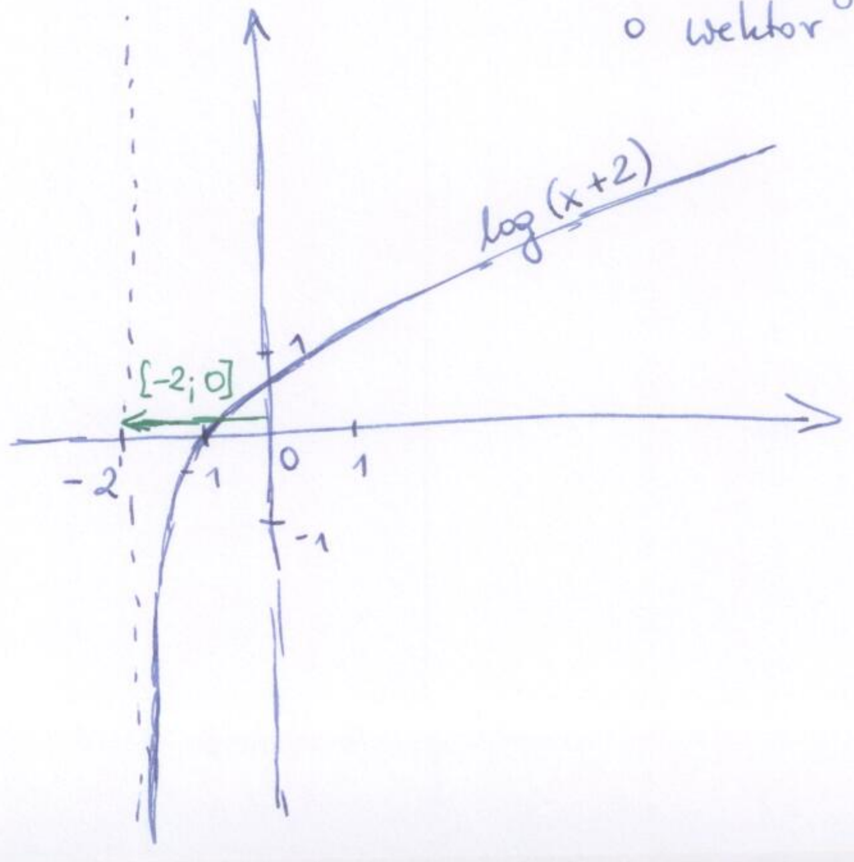
19. Naszkicuj wykres funkcji

$$f(x) = \log (x+2)$$

$D = (-2; +\infty)$

$\log x \longrightarrow f(x)$

przesunięty o wektor $[-2, 0]$



20. Naszkicuj wykres funkcji:

$f(x) = 1 - \log(x-1)$

$\mathbb{D} = (1; +\infty)$

Zasada:

Na podstawie $f(x)$ narysować $g(x)$,

gdy $g(x) = -f(x)$:

odbijamy $f(x)$ symetrycznie względem OX

gdy $g(x) = f(-x)$

odbijamy $f(x)$ symetrycznie względem OY

gdy $g(x) = f(x+p) + q$

przesuwamy $f(x)$ o wektor $[-p; q]$

W naszym zadaniu:

(1) Przekształcamy:

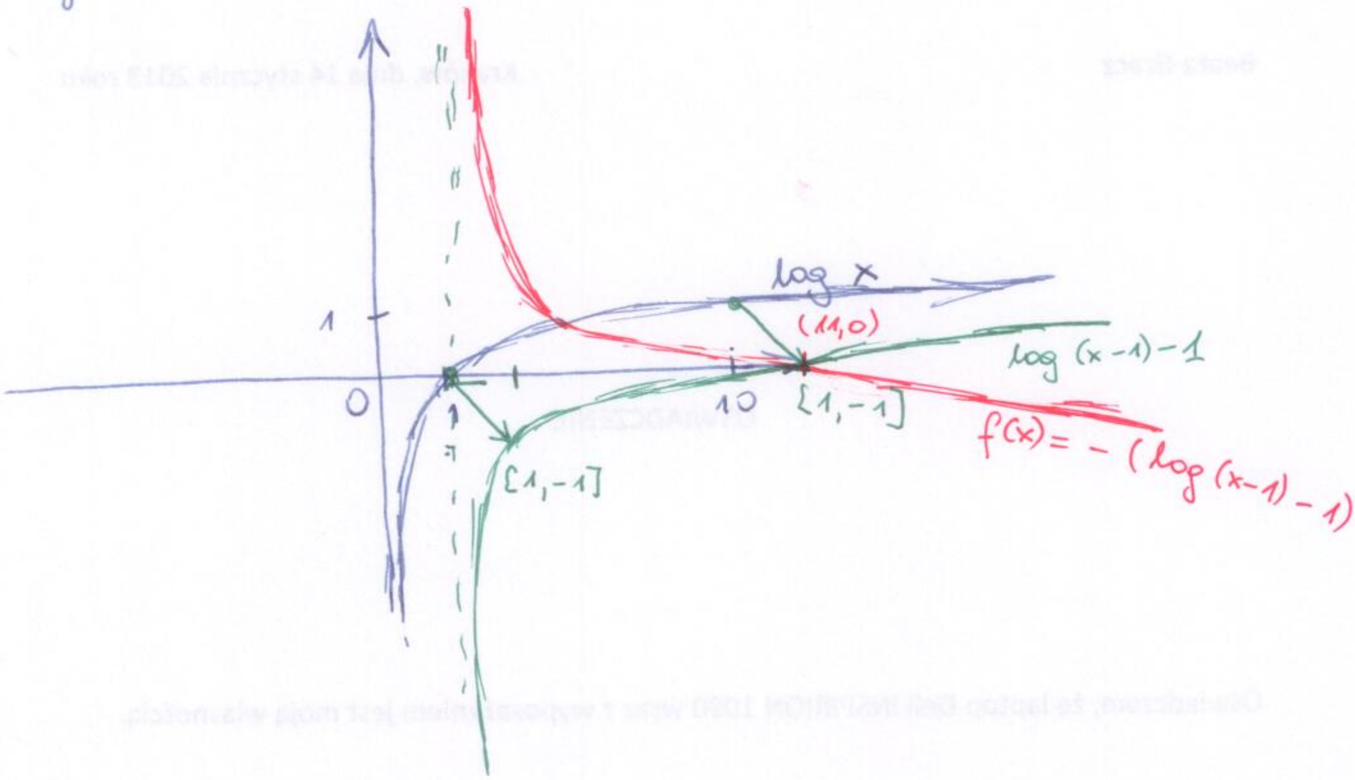
$f(x) = -(\log(x-1) - 1)$

(2) Rysujemy: $\log x$

(3) Wykonujemy translację o wektor $[1, -1]$

(4) Odbijamy uzyskany wykres

względem osi OX.



Opracował

DR Paweł Leszek Żak

Kraków, 14 I 2013 r.