Dla jakiej wartości $z \in \mathbb{C}$ liczba

$$w = \frac{1-z}{1+z}$$ jest liczbą rzeczywistą?

<u>Rozwiązanie:</u>

$$z = a + ib, \quad a \neq -1 \wedge b \neq 0$$

$$w = \frac{(1-a)-ib}{(1+a)+ib} = \frac{[(1-a)-ib]\,[(1+a)-ib]}{[(1+a)+ib][(1+a)-ib]} =$$

$$= \frac{(1-a)(1+a) - b^2 + i\left((a-1)b - (1+a)b\right)}{(1+a)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{1-a^2-b^2 + i(ab - b - b - ab)}{(1+a)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{1-a^2-b^2 - 2bi}{(1+a)^2 + b^2}$$

$$\operatorname{Im}(w) = -\frac{2b}{(1+a)^2+b^2}$$

$$w \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(w) = 0$$

$$-\frac{2b}{(1+a)^2+b} = 0 \iff \underline{b = 0}$$

Dla liczb postaci $z = a$, czyli $\mathbb{R}$

Dla jakiej wartości $z \in \mathbb{C}$ liczba

$$w = \frac{i-z}{1+z}$$ jest liczbą rzeczywistą

Rozwiązanie

$$z = a + ib \quad , (a \neq -1 \wedge b \neq 0)$$

$$w = \frac{i - a - ib}{1 + a + ib} = \frac{(i - a - ib)(1 + a - ib)}{(1+a) + ib)(1+a-ib)} =$$

$$= \frac{[-a - i(b-1)][(1+a) - ib]}{(1+a)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{-a(1+a) - b(b-1) + abi + (1+a)(b-1)i}{(1+a)^2 + b^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{ab + (1+a)(b-1)}{(1+a)^2 + b^2}$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow ab + (1+a)(b-1) = 0$$

$$ab + b - a + ab = 0$$

$$b(2a+1) = a$$

$$\underline{b = \frac{a}{2a+1}}$$

Dla liczb z postaci

$$z = a + i\frac{a}{2a+1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż równanie

$$z^4 = (1+i\sqrt{3})z$$

Rozwiązanie:

$$z^4 = (1+i\sqrt{3})z$$

$$z^4 - (1+i\sqrt{3})z = 0$$

$$z\left(z^3 - (1+i\sqrt{3})\right) = 0$$

$$z=0 \quad \lor \quad \underbrace{z^3 = (1+i\sqrt{3})}_{\text{pierwiastkujemy}}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2 \qquad\qquad w_k = \left(\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}\right)_k, \quad k=0,1,2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi\right)$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{13}{9}\pi + i\sin\frac{13}{9}\pi\right)$$

Rozwiązaniami są liczby:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi\right)$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{13}{9}\pi + i\sin\frac{13}{9}\pi\right)$$

Oblicz $\sqrt{\det\begin{bmatrix}1+3i & 3-i & 2i\\ 5 & 1-i & 2-i\\ i & 0 & i\end{bmatrix}}$

Rozwiązanie

najpierw wyznacznik:

$\det\begin{bmatrix}1+3i & 3-i & 2i\\ 5 & 1-i & 2-i\\ i & 0 & i\end{bmatrix} =$ Rozwinięcie względem wiersza nr. 3 (można było zastosować regułę Sarrusa)

$$= (-1)^{1+3} \cdot i \det\begin{bmatrix}3-i & 2i\\ 1-i & 2-i\end{bmatrix} + (-1)^{3+3} i \det\begin{bmatrix}1+3i & 3-i\\ 5 & 1-i\end{bmatrix} =$$

$$= i\big((3-i)(2-i) - (1-i)2i\big) + i\big((1+3i)(1-i) - 5(3-i)\big) =$$

$$= i\big((6-1-5i) - (2i+2)\big) + i\big((1+3+3i-i) - 15+5i\big) =$$

$$= i(5 \underline{-5i} \underline{-2i} -2 +4 \underline{+2i} -15 + \underline{5i}) =$$

$$= i(-8) = -8i$$

Teraz pierwiastek

$z = -8i \qquad w = \sqrt{-8i}$

$|z| = 8$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = 0\\ \sin\varphi = -1\end{array}\right\} \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$w_0 = \sqrt{8}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right) = -2+2i$

$w_1 = \sqrt{8}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right) = 2-2i$

Rozwiąż:

$$\frac{z-i}{z+i} = 1+i$$

Rozwiązanie

$z = a + i b$

$$1+i = \frac{a+i(b-1)}{a+i(b+1)} \qquad \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq -1 \end{cases}$$

$(1+i)(a+i(b+1)) = a + i(b-1)$

$a + i(b+1) + ai - (b+1) = a + i(b-1)$

$\cancel{a} + \cancel{ib} + i + ai - b - 1 = \cancel{a} + \cancel{ib} - i$

$-(b+1) + i(2+a) = 0$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$z = -2 - i$

Rozwiąż równanie:

$$z^3 = (i-z)^3$$

Rozwiązanie:

$$\left[z^3 - (i-z)^3\right] = 0$$

$$(z-(i-z))\left(z^2 + z(i-z) + (i-z)^2\right) = 0$$

$$(2z-i)\left(z^2 + iz - z^2 + (-1) - 2iz + z^2\right) = 0$$

$$(2z-i)\left(z^2 - iz - 1\right) = 0$$

$$2z = i \quad \vee \quad z^2 - iz - 1 = 0$$

$$z = \frac{1}{2}i$$

$$z = a + ib$$

$$(a+ib)^2 - i(a+ib) - 1 = 0$$

$$a^2 + 2iab - b^2 - ai + b - 1 = 0$$

$$\cancel{(a^2-b^2)}$$

$$(a^2 - b^2 + b - 1) + i(2ab - a) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b - 1 = 0 \\ 2ab - a = 0 \end{cases}$$

$$a(2b-1) = 0$$

$$\underset{1}{a = 0} \quad \vee \quad 2b - 1 = 0 \implies \underset{2}{b = \tfrac{1}{2}}$$

1) $-b^2 + b - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 < 0$

b ma być $\mathbb{R}$

2) $a^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$a^2 = +\frac{3}{4}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_1 = \tfrac{1}{2}i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Wykaż, że jeżeli liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = \frac{1}{z}$ to $|z| = 1$

Rozw.

Zał. $\bar{z} = \frac{1}{z}$

Teza

$|z| = 1$

Dowód:

wiemy $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $z = a + ib$

$z \cdot \bar{z} = z \cdot \frac{1}{z} = 1 \quad (*)$

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \overset{(*)}{=} 1$

~~czy~~ a i b leżą na okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu 1.

Moduł ~~tych~~ liczb zespolonych identyfikowanych z tak określonymi parami jest równy 1.