zad 1

$$10^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 5^{3x}$$

Rozpisujemy w postaci iloczynu liczb pierwszych

$$2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{2x} \cdot 5^{2x} = 2^8 \cdot 2^x \cdot 5^{3x}$$

Na tej podstawie staramy się dobrać ~~dal~~ tak podstawę potęgi, by móc ~~mieć~~ dalej porównać wykładniki. Tą podstawą będzie $\left(\frac{5}{2}\right)$. Dzielimy przez $2^{4x} \cdot 2^8$:

$$\frac{\cancel{2^4} \cdot 5^4 \cdot \cancel{2^{2x}} \cdot 5^{2x}}{\cancel{2^4} \cdot \cancel{2^{2x}} \cdot 2^{2x} \cdot 2^4} = \frac{\cancel{2^4} \cdot \cancel{2^4} \cdot \cancel{2^x} \cdot 5^{3x}}{\cancel{2^4}\, \cancel{2^4} \cdot \cancel{2^x} \cdot 2^{3x}}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \cancel{5} \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+4} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}$$

Korzystamy z różnowartościowości funkcji wykładniczej:

$$2x + 4 = 3x$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Zad 1

$\log_3 (x-3) > 1$

D:

$x - 3 > 0$

$x > 3$

Dziedziną zadania jest zbiór $(3, +\infty)$.
Korzystając z definicji logarytmu:

$1 = \log_3 3$

$\log_3 (x-3) > \log_3 3$

Korzystamy z różnowartościowości oraz monotoniczności fcji logarytmicznej. Pamiętamy o tym, iż dla podstawy większej od 1 logarytm jest funkcją rosnącą

$x - 3 > 3$

$x > 6$

Rozwiązaniem są

$x \in (6, +\infty)$.

zad 1

$$\log_3\left(4-\tfrac{1}{5}x\right) > 2$$

Dziedzina:

$$4-\tfrac{1}{5}x > 0$$

$$\tfrac{1}{5}x < 4$$

$$x < 20$$

Dziedzina zadania jest zbiór $x \in (-\infty, 20)$

z definicji logarytmu:

$$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$$

$$\log_3\left(4-\tfrac{1}{5}x\right) > \log_3 9$$

$$4-\tfrac{1}{5}x > 9$$ ← różnowartościowość oraz monotoniczność f-cji logarytmicznej

$$\tfrac{1}{5}x < -5$$

$$x < -25$$

Rozwiązanie:

$$x \in (-\infty, -25).$$

Zad 2

$$a_n = \sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{9^n+2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{9^n+2^n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Korzystamy ze wzoru} \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n+3^n-9^n-2^n}{\sqrt{9^n+3^n}+\sqrt{9^n+2^n}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{wyłączamy z mianownika} \\ 3^n = \sqrt{9^n} \end{array} \right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n\left(\sqrt{1+\frac{1}{3^n}}+\sqrt{1+\left(\frac{2}{9}\right)^n}\right)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{wyłączamy z licznika} \\ 3^n \text{ i upraszczamy} \end{array} \right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1+\frac{1}{3^n}}+\sqrt{1+\left(\frac{2}{9}\right)^n}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{przejście} \\ \text{do granicy} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \sqrt{4^n+3^n} - \sqrt{4^n+2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4^n+3^n} - \sqrt{4^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n-4^n-2^n}{\sqrt{4^n+3^n}+\sqrt{4^n+2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{2^n\left(\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}} = +\infty, \text{ gdyż}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

$b_n = \left(\frac{\ldots}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{\frac{n}{6}\cdot 12} =$$

Korzystamy ze wzoru: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

TU CHCEMY MIEĆ: $\boxed{\text{coś}} \times \frac{n}{6}$

$$= e^{12}$$

$b_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{-2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{-2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot(-6)} = e^{-6}.$$

---

zad 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} =$$

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cancel{1}-x-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}}{\cancel{1}-x-\cancel{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-1)(1+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})\cdot(-\cancel{x})} = \frac{-2}{-2} = \underline{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{3x+1}}{1-3x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(1+\sqrt{3x+1})}{-3x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{-2}{-6} = 1/3.$$

Zad 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$$

Obserwujemy, że najwyższy stopień wielomianu w liczniku jest o 2 niższy niż w mianowniku. Można podejrzewać, że szereg jest zbieżny podobnie do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Stosujemy kryterium porównawcze:

$$\frac{n+2}{2n^3-1} < \frac{2n}{2n^3-1} < \frac{2n}{n^3} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$$, począwszy od pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$.

Na mocy kryterium porównawczego szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3-1}$$

Podobne obserwacje jak wcześniej.

$$\frac{3n+2}{n^3-1} < \frac{4n}{n^3-1} < \frac{4n}{\frac{1}{2}n^3} = 8 \cdot \frac{1}{n^2}$$

począwszy od pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$

Na mocy kryterium porównawczego szereg jest zbieżny.

Skoro $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$: $c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot \frac{1}{n^2}$ też jest zbieżny ← Tw. to podane było podczas wykładu.

Zad 5

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \qquad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{-1}{0^- \cdot (-3)}\right] = -\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{-1}{0^+ \cdot (-3)}\right] = +\infty \end{aligned}\right\} \text{as. pionowa}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{2}{3 \cdot 0^-}\right] = -\infty \\ &\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{2}{3 \cdot 0^+}\right] = +\infty \end{aligned}\right\} \text{as. pionowa}$$

Szukamy asymptoty ukośnej.

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \underline{1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x - 2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \underline{1}$$

Wykres funkcji posiada następujące asymptoty:

$x = -1$, $x = 2$, $y = x + 1$.

$$g(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$$

$$\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right\} \text{as. pionowa}$$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+3)^3}{x(x+2)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} = \underline{1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} - x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^3+9x^2+27x+27-x(x+2)^2}{(x+2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^3+9x^2+27x+27-x^3-4x^2-4x}{(x+2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{5x^2+23x+27}{(x+2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{5+\frac{23}{x}+\frac{27}{x^2}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}\right) = 5$$

Wykres funkcji posiada następujące asymptoty:

$x = -2, \quad y = x + 5.$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-x-2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3-1}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{-2}{0^-\cdot(-3)}\right] = -\infty \\ &\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-1}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{-2}{0^+(-3)}\right] = +\infty \end{aligned}\right\} \text{as. pionowa}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-1}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{1}{3\cdot 0^-}\right] = -\infty \\ &\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-1}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{1}{3\cdot 0^+}\right] = +\infty \end{aligned}\right\} \text{as. pionowa}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2-x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1-x^3+x^2+2x}{x^2-x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$$

Wykres funkcji posiada następujące asymptoty:

$x = -1$, $x = 2$, $y = x + 1$.

$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} &= \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} &= \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \end{aligned}\right\} \text{as. pionowa}$$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \underline{1}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x + 13}{x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + \frac{13}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

Wykres funkcji posiada następujące asymptoty:

$x = 3$, $y = x - 3$.

Opracował:

Dr Paweł Leszek Żak

Kraków, 24. II. 2014 r