Całkowanie numeryczne

Paweł Żak

Laboratoria z przedmiotu:

Wybrane zagadnienia z matematyki

Całkowanie

Matematycznie, przez całkowanie rozumiemy operację odwrotną do różniczkowania.

Całka

Całka nieoznaczona

$$\int f(x)dx$$

Całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)dx$$

Całkowanie – po co ktoś to wymyślił ?

Całkowanie wbrew pozorom nie jest po to tylko by było co robić na zajęciach z matematyki wyższej.

Operacja znajdowania całki oznaczonej może być wykorzystana do rozwiązywania wielu problemów pojawiających się podczas opisu zagadnień fizycznych.

Całka oznaczona zdefiniowana wg. Riemmana,
jest nieskończoną sumą nieskończenie małych.

Całkowanie – po co ktoś to wymyślił ?

Całkowanie wbrew pozorom nie jest po to tylko by było co robić na zajęciach z matematyki wyższej.

Operacja znajdowania całki oznaczonej może być wykorzystana do rozwiązywania wielu problemów pojawiających się podczas opisu zagadnień fizycznych.

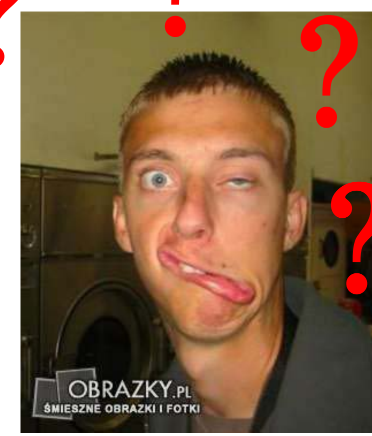
Całka oznaczona zdefiniowana wg. Riemmana, jest nieskończoną sumą nieskończenie małych.

Całkowanie – po co ktoś to wymyślił ?

Całkowanie wbrew pozorom nie jest po to tylko by było co robić na zajęciach z matematyki wyższej.

Operacja znajdowania całki oznaczonej może być wykorzystana do rozwiązywania wielu problemów pojawiających się podczas opisu zagadnień fizycznych.

Całka oznaczona zdefiniowana wg. Riemmana, jest nieskończoną sumą nieskończenie małych.

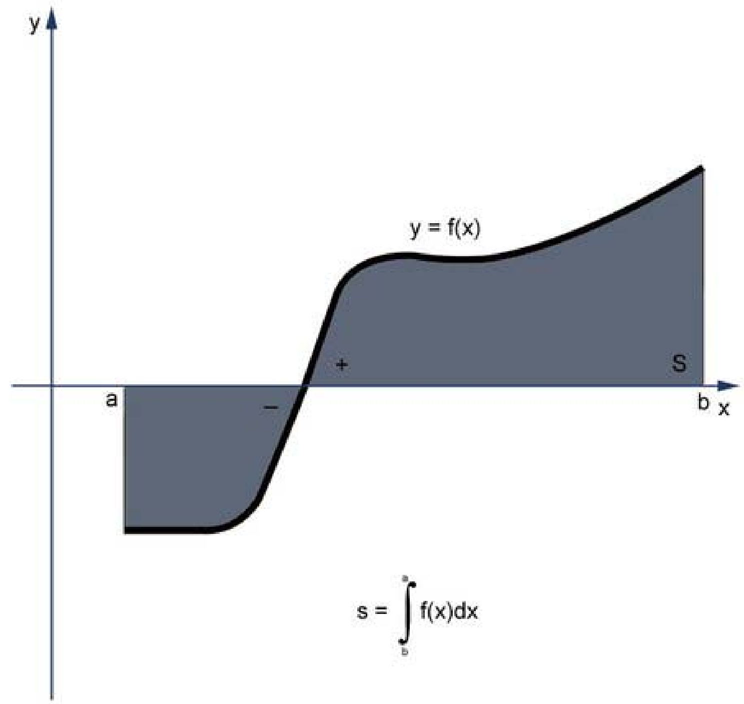


Co to oznacza spróbuję wyjaśnić na następnym slajdzie.

Całkowanie – o co w tym chodzi?

Sens całkowania ukrywa się w samej jego nazwie: całkowanie czyli budowanie całości – sumowanie.

Całka ma bardzo prostą interpretację geometryczną: jest to pole zawarte pomiędzy osią OX, a wykresem funkcji.



Wyobraźmy sobie, że możemy dowolnie drobno podzielić odcinek [a,b] na podprzedziały. Wówczas suma iloczynów długości przedziału i wartości funkcji podcałkowej w tym przedziale będzie całką, jeżeli dalsze zagęszczanie podziału nie będzie już wpływało na wartość sumy.

Całkowanie – o co w tym chodzi?

W przypadku, gdy znamy analityczne rozwiązanie całki nieoznaczonej:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Możemy je wykorzystać do obliczania wartości całki oznaczonej, według wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Całkowanie – Ach, Ci matematycy

Zawsze to samo:

Najpierw wymyślają skomplikowane operacje, a później orientują się, że w większości przypadków po prostu nie da się tego policzyć….

Wtedy starają się sprowadzić problem do dodawania i mnożenia. Takie podejście nazywa się Analizą Numeryczną.

Całkowanie – Ach, Ci matematycy

Zawsze to samo:

Najpierw wymyślają skomplikowane operacje, a później orientują się, że w większości przypadków po prostu nie da się tego policzyć….

Wtedy starają się sprowadzić problem do dodawania i mnożenia. Takie podejście nazywa się Analizą Numeryczną.

W przypadku problemu poszukiwania całki oznaczonej opracowują **Metody Całkowania Numerycznego**.

Do czego możemy używać całkowania

Całkowanie może być narzędziem służącym do analizy procesów fizycznych:

- praca zdefiniowana jest całką;
- mając dystrybucję pewnego parametru możemy znaleźć jego ilość w ośrodku (ziarna, cząstki, gęstość materii, itp. …);
- poszukiwanie środków ciężkości figur;
- pomiar długości toru ruchu;
- ….
- obliczanie ciepła wydzielonego podczas przemiany;
- rozwiązywanie pewnych typów równań różniczkowych;
- wiele innych ….

Przykład 1

Po zastosowaniu odpowiedniego odczynnika możliwe było kolorowe wytrawienie próbek materiału. Analiza statystyczna ujawniła wartości średniego promienia ziarna oraz odchylenia standardowego.

Te parametry prowadzą do oszacowania rozkładu wielkości ziaren, N(d).

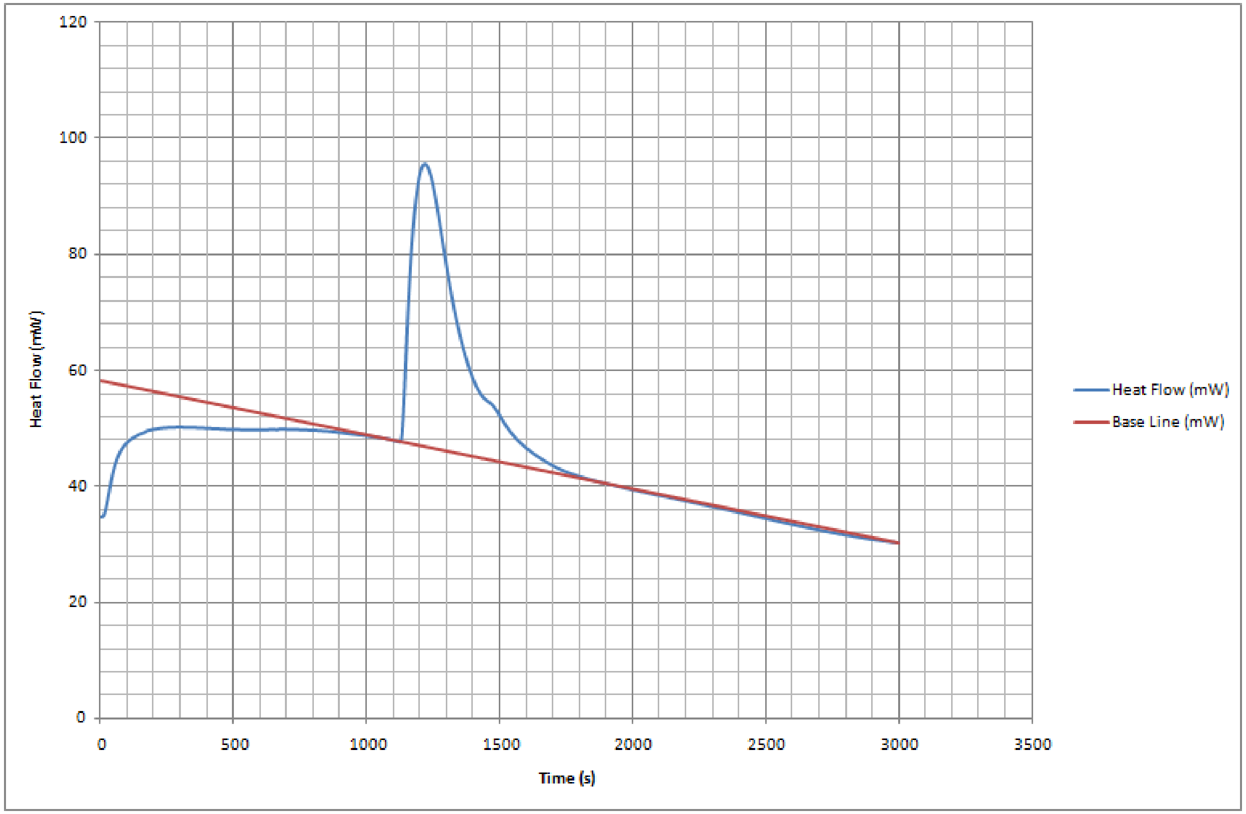
Całka : $\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} N(d)\delta d$ jest liczbą ziaren o średnicy z przedziału $[d_{min}, d_{max}]$.

Przykład 2

Mikrokalorymetr zapisuje serie danych, między innymi: ilość ciepła wydzieloną, w kolejnych krokach czasowych procesu.

Przykład 2

Dane te umieszczone w kartezjańskim układzie współrzędnych mogą zostać opisane przez funkcję.

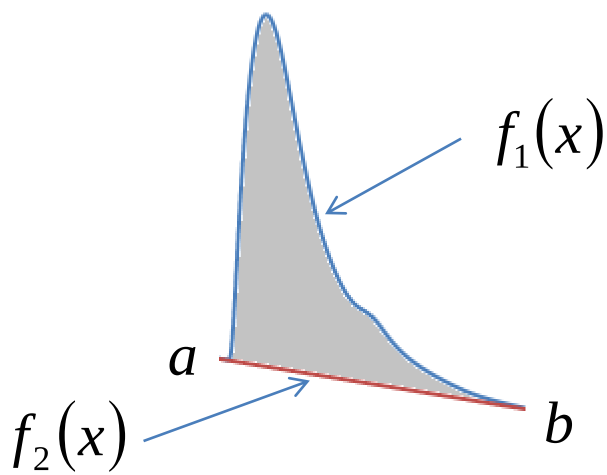


Przykład 2

Linia bazowa – hipotetyczna krzywa opisująca przebieg procesu w sytuacji w której nie następowałyby przemiany fazowe.

Ilość ciepła wydzielonego podczas przemiany może zostać wyznaczona przy pomocy różnicy całek:
całki pod krzywą opisującą ilość wygenerowanego ciepła oraz całki pod linią bazową.
Obie te całki brane są w przedziale o krańcach wyznaczonych przez punkty przecięcia funkcji podcałkowych.

$$\int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx$$



Przykład 3

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne z warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} y'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Znaleźć wartość funkcji $y(x)$ w punkcie x = 3.

$$y(3) = y(0) + \int_0^3 y'(x)dx = 1 + \int_0^3 \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx$$

Jak całkować dokładnie w programie MAXIMA ?

```
integrate(3*t, t);

integrate(2*x*x, x, 0, 1);
```

Rozwiązanie dla przykładu 3

```
eq : 'diff(y,x)=3*x^2-2*x+1;

ode2(eq, y, x);

ic1(%, x=0, y=1);

f(x):= x^3-x^2+x+1;

f(3);

1+integrate(3*x^2-2*x+1, x,0,3);
```

Przykład 4

$$\int_0^3 x\,dx = \text{pole trójkąta prostokątnego o podstawie długości 3 i wysokości 3}$$

Geometrycznie:

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{1}{2}\,3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

Analitycznie:

$$\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{2}\,3^2 - \frac{1}{2}\,0^2 = \frac{9}{2}$$

Metody całkowania numerycznego

Metoda prostokątów

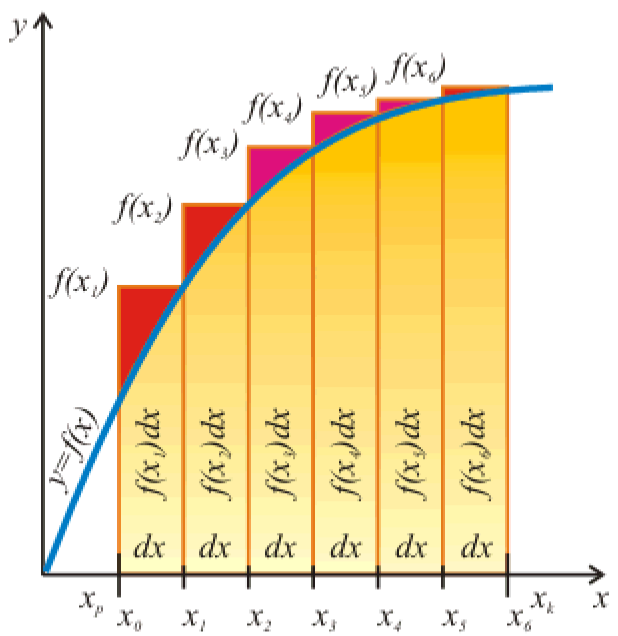
Metoda trapezów

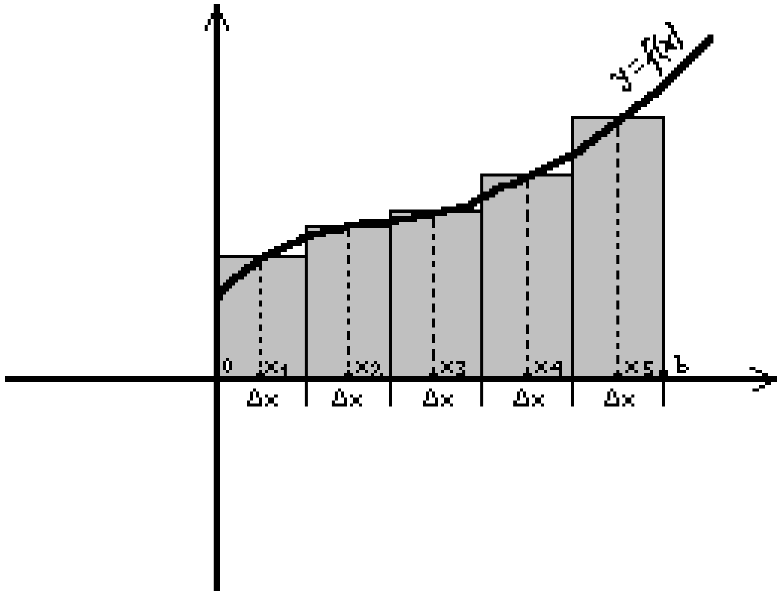
Metoda parabol

Metoda Monte Carlo

Metoda prostokątów

Metoda prostokątów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji przez prostokąty o podstawie równej długości kroku całkowania i wysokości równej wartości funkcji w przedziale określonym przez krok całkowania.





Wartość funkcji może być brana z punktów brzegowych lub z wnętrza przedziału.

Metoda prostokątów

Formuła obliczeniowa:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

Metoda prostokątów

Metoda prostokątów dla przykładu 4 będzie wyglądała następująco:

```
f(x) := x;
dx : 1;
a  : 0.68;
S1 : 0;
S2 : 0;
S3 : 0;
N : 3/dx;

for i : 0 while i < N do
(
   S1 : S1 + dx*f(0+i*dx),
   S2 : S2 + dx*f(a*dx+i*dx),
   S3 : S3 + dx*f(dx+i*dx)
);

S1;
S2;
S3;
```

Metoda prostokątów

Zmiana parametru *a* i *dx* w poprzednim przykładzie pokazuje, że dokładność metody zależy od:

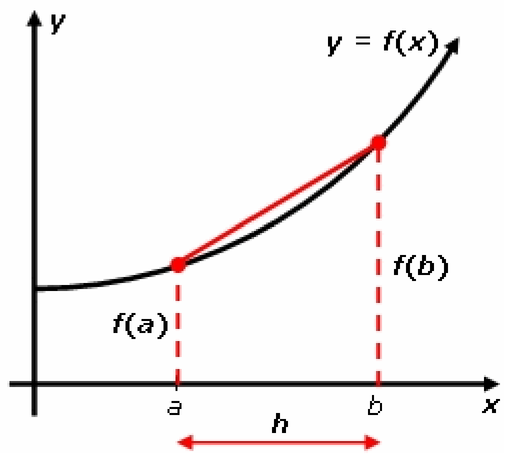
- wyboru punktu, w którym liczymy wartość funkcji,

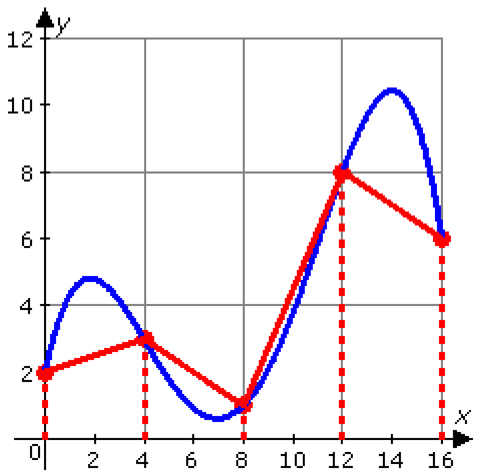
- długości kroku całkowania

oraz, że odpowiednio zmniejszając krok całkowania zbliżamy się do rozwiązania dokładnego.

Metoda trapezów

Metoda trapezów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji przez trapezy prostokątne o wysokości równej długości kroku całkowania i podstawach o długościach odpowiadających wartościom funkcji w punktach węzłowych na brzegu przedziału.





Metoda trapezów

Formuła obliczeniowa:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \left(f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i) \right)$$

Metoda trapezów

Metoda trapezów zastosowana do przykładu 4 da rozwiązanie dokładne. Tak samo ta metoda zachowa się dla każdego przypadku całkowania funkcji liniowej.

```
f(x) := x;
dx : 1;
S : 0;
N : 3/dx;

for i : 0 while i < N do
(
   S : S + 0.5*dx*(f(0+i*dx) + f(dx+i*dx))
);
display(S);
```

Metoda trapezów

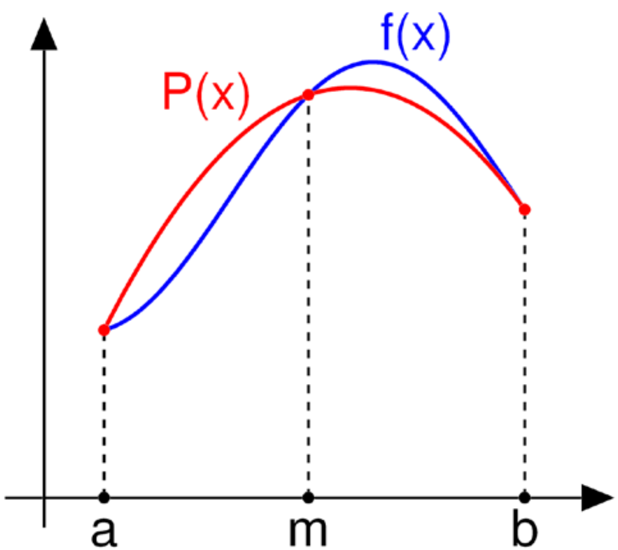
W przypadku całkowania funkcji innych niż liniowa, dokładność metody trapezów zależy od długości kroku całkowania.

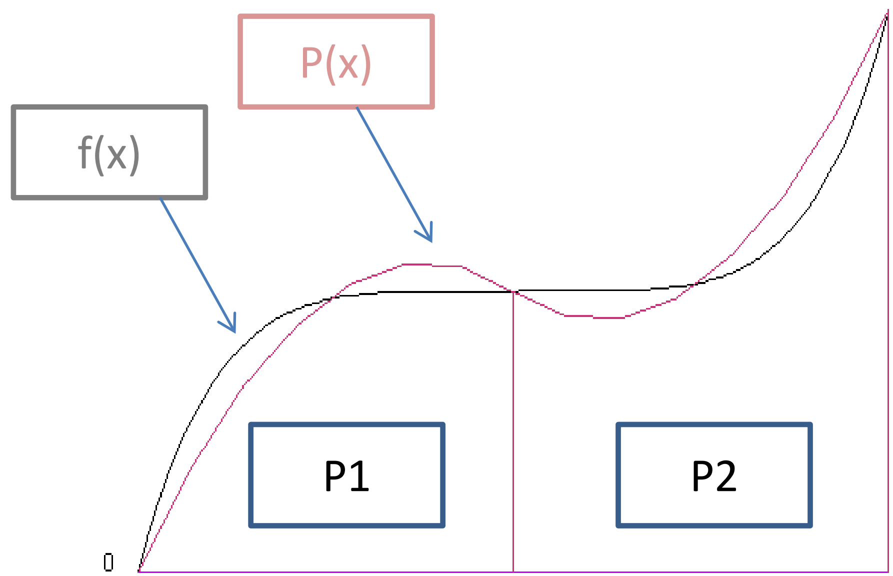
```
f(x) := 3*x^2;
dx : 1;
S : 0;
N : 3/dx;

for i : 0 while i < N do
(
   S : S + 0.5*dx*(f(0+i*dx) + f(dx+i*dx))
);
display(S);

integrate(3*x^2, x, 0, 3);
```

sprawdzenie

Metoda parabol (metoda Simpsona)

Metoda parabol polega na przybliżeniu pola pod krzywą polami figur płaskich budowanych w następujący sposób:
podobnie jak dla trapezów podstawą jest podprzedział całkowania, bokami są wartości funkcji całkowanej w punktach brzegowych, czwarty bok jest opisany parabolą rozpiętą na wartościach funkcji całkowanej w punkcie środka przedziału całkowania oraz punktów brzegowych.





Metoda parabol (metoda Simpsona)

Formuła obliczeniowa:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \left(f(x_i) + 4 f\left(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x_i\right) + f(x_i + \Delta x_i) \right)$$

Metoda parabol (metoda Simpsona)

Metoda parabol jest dokładna dla wielomianów stopnia mniejszego lub równego 2.

```
f(x) := 0.015*(x^5 - x^4);
dx : 1;
S : 0;
N : 3/dx;

for i : 0 while i < N do
(
   S : S + (1/6)*dx*(f(0+i*dx) + 4*f(0.5*dx+i*dx) + f(dx+i*dx))
);
display(S);

integrate(f(x), x, 0, 3), numer;
```

Metoda parabol (metoda Simpsona)

W przypadku pozostałych funkcji podcałkowych jej dokładność zależy od długości kroku całkowania.

```
f(x) := 0.01*exp(x^2);
dx : 1;
S : 0;
N : 3/dx;

for i : 0 while i < N do
(
   S : S + float((1/6)*dx*(f(0+i*dx) + 4*f(0.5*dx+i*dx) + f(dx+i*dx)))
);
display(S);

integrate(f(x), x, 0, 3), numer;
```

Całkowanie dla danych doświadczalnych

W przypadku danych pochodzących z eksperymentu mamy do czynienia z kilkoma ciągami danych:

$$\{x_i\}_{i=1,2,..,N}$$

najczęściej czas

$$\{f_i\}_{i=1,2,...,N}$$

pierwszy mierzony parametr w momencie odpowiadającym i-tej wartości zmiennej x

$$\{g_i\}_{i=1,2,...,N}$$

drugi mierzony parametr w momencie odpowiadającym i-tej wartości zmiennej x

$$\vdots$$

pozostałe mierzone parametry

Całkowanie dla danych doświadczalnych

Zgromadzone w ten sposób dane mogą być bezpośrednio wykorzystane do wyznaczania przybliżonej wartości całki. Zakładamy wówczas, że:

$$f_i = f(x_i)$$
$$g_i = g(x_i)$$

i stosujemy podane poprzednio wzory.