Paweł Leszek Żak
Katedra Inżynierii Procesów Odlewniczych
Wydział Odlewnictwa AGH

Kraków, 26 listopada 2012

Drodzy Państwo !

Trudności jakie nastręczały nam dowody właściwości relacji doprowadziły mnie do decyzji, która ma na celu uniknięcie tworzenia niepotrzebnych problemów. Myślę, że nasze wspólne zajęcia powinny się koncentrować na, przede wszystkim, tych zagadnieniach, które będą Wam przydatne podczas kolejnych kursów. Nie mam ambicji zrobić z Was matematyków - teoretyków, a raczej pomóc w zrozumieniu aparatu matematycznego pozwalającego opisywać i zrozumieć otaczający nas świat. A także ułatwić Wam nabycie biegłości w posługiwaniu się nim. Wierzę, że takie podejście zaowocuje głębszym zrozumieniem zagadnień prezentowanych podczas innych przedmiotów, jako że matematyka jest językiem, który zespaja wszelkie nauki ścisłe. A zrozumienie tego języka pozwala rozwijać się nam wszystkim dużo szybciej, gdyż ubogaca naszą intuicję i pozwala na korzystanie z ogólnych zasad nawet podczas poznawania całkiem nowych zagadnień.

W związku z powyższym usuwam z wymagań części praktycznej egzaminu zadania dotyczące relacji. Zadania oznaczone numerami 1, 2, 3. Zagadnienia teoretyczne dotyczące relacji proszę potraktować jako ćwiczenie pozwalające na zrozumienie wprowadzonych podczas naszego pierwszego spotkania pojęć matematycznych.

Powinniście Państwo wiedzieć, następujące rzeczy:

(A) Dane jest twierdzenie:

$$\forall x \in X : Tw(x)$$

Czytamy: *"Dla każdego elementu x ze zbioru X, zachodzi twierdzenie Tw."*

By pokazać, że twierdzenie to nie zachodzi, wystarczy pokazać **kontrprzykład**, czyli znaleźć taką wartość x_0 ze zbioru X, dla której twierdzenie Tw nie jest spełnione.

(B) Relacja jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego zbiorów, co zapiszemy:

$$R \subset A \times B$$

Czytamy: *"Relacja R jest zawarta w iloczynie kartezjańskim zbiorów A i B."*

W związku z powyższym relacja jest zbiorem par uporządkowanych. Co podkreśla jak bardzo ważne jest, że tak jak kolejność zbiorów w iloczynie kartezjańskim, tak kolejność elementów w relacji gra kluczową rolę. I dlatego mówimy, że *relacja R jest ze zbioru A do zbioru B*. Dodatkowo nazywamy zbiór A dziedziną, a zbiór B przeciwdziedziną relacji R.

Chciałbym byście Państwo wiedzieli też, że wśród wszystkich relacji można wyszczególnić te wyjątkowe: **funkcje**.

(C) Właściwości relacji, które podawałem podczas wykładu, nie musicie znać na pamięć, ale potraktujcie je jako ćwiczenie odczytywania skomplikowanych formuł, zapisanych w języku matematyki. Takie zadania mogą pojawić się na kolokwiach:

Dana jest relacja $R \subset A \times A$, odczytaj sens właściwości zapisanych symbolicznie, względnie zapisz symbolicznie właściwość opisaną słownie:

a) $\forall x \in A : (x,x) \in R$

Czytamy: *"Dla każdego elementu x należącego do zbioru A, element x jest sam ze sobą w relacji R"*, krócej *"Każdy element* zbioru *A jest sam z sobą w relacji R"*.

b) $\forall x, y \in A : [(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R]$

Czytamy: *"Dla każdych elementów x i y należących do zbioru A, jeżeli element x jest w relacji R z elementem y, to element y jest w relacji R z elementem x."*

c) $\forall x, y, z \in A : [x R y \wedge y R z] \Rightarrow x R z$

Mamy tu do czynienia z innym zapisem faktu pozostawania w relacji - relacja pomiędzy elementami zapisana jak działanie. Alternatywny zapis, jednak sens pozostaje taki sam.

Czytamy: *"Dla każdych elementów x, y* oraz *z należących do zbioru A, jeżeli element x jest w relacji R z elementem y i element y jest w relacji R z elementem z, to element x jest w relacji R z elementem z."*

d) $\forall x, y \in A : [(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R] \Rightarrow x = y$

Czytamy: *"Dla dowolnych elementów x i y należących do zbioru A zachodzi następująca implikacja jeżeli element x i element y są w relacji R i element y jest w relacji R z elementem x, to elementy x i y są sobie równe"*.

W tym przypadku właściwość została zapisana została językiem bardziej literackim, jednak sens matematyczny tej konstrukcji jest taki sam jak uprzednio.

e) $\forall x, y \in A : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$

Czytamy: *"Dla dowolnych dwóch elementów x, y należących do zbioru A, element x jest w relacji R z elementem y lub element y jest w relacji R z elementem x."* krócej: *"Każde dwa elementy zbioru A są ze sobą w relacji R"*.

Oczywiście fakt, że coś nie jest obowiązkowe, nie oznacza, że nie możecie Państwo dla poszerzenia swych horyzontów spróbować rozwiązać tych zadań.

Jestem przerażony układem godzin. Teraz mamy ogromną lukę, a pod koniec semestru nasze zajęcia będą straszliwie skomasowane. Dlatego, jak tylko znajdę trochę czasu przygotuję dla Was dokumenty z przykładami zagadnień prezentujących podstawowe właściwości funkcji elementarnych: wykresy, dziedziny, zasady przekształceń. Rozumiem, że jesteście Państwo wychowankami różnych szkół. I nawet jeżeli zawsze staraliście się być na bieżąco z materiałem, to pewne elementy zostały Wam przekazane w sposób powierzchowny, pewne może pominięte. Ze względu na niepoważne podejście naszego rządu do edukacji swych obywateli, podczas matury nie musieliście nadrabiać wszystkiego. Dlatego postaram się utrzymywać z Wami kontakt i w miarę możliwości pomóc Wam w przypomnieniu sobie podstaw. Mam nadzieję, że moje wysiłki nie pójdą na marne, a zagadnienia, które dla Was będę przygotowywał okażą się wielce pomocne podczas dalszej edukacji. O co postaram się zadbać z całych sił.

Ślę pozdrowienia

Paweł L. Żak