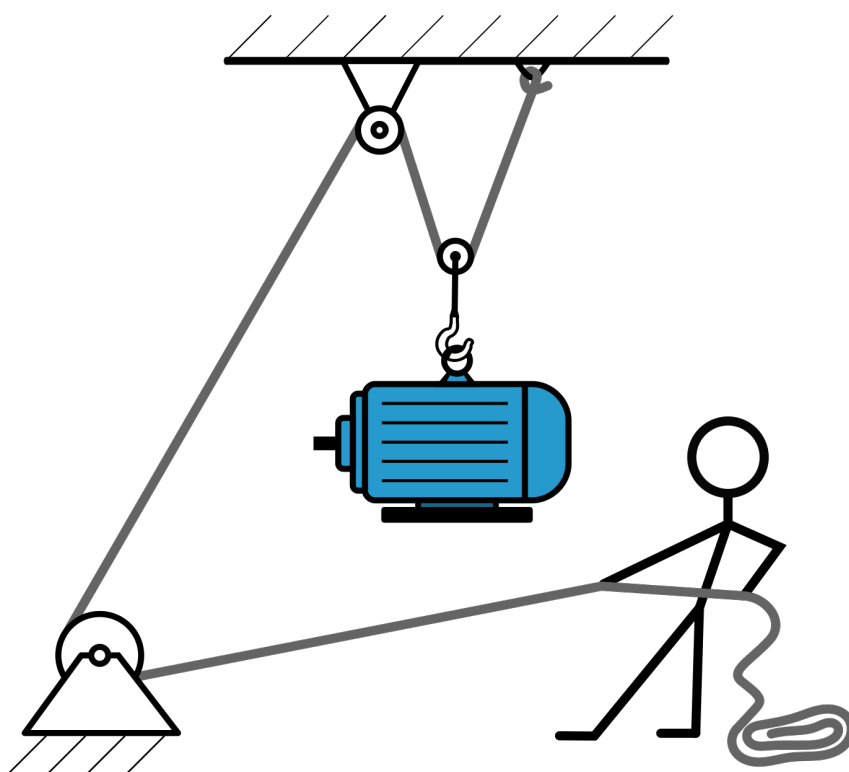


PODSTAWY MECHANIKI

zbiór zadań



Treści zawarte w niniejszym opracowaniu stanowią materiał dydaktyczny przeznaczony do wykorzystania w trakcie zajęć z przedmiotu **Podstawy Mechaniki** realizowanego na kierunku **Elektrotechnika** na **Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej**. Zostały one przygotowane przez pracowników Katedry Projektowania i Eksploatacji Maszyn, WIMiR bądź też pochodzą z cytowanych źródeł literaturowych.

Historia zmian

Wersja	Data	Autor/-rzy	Zmiany
0	-	ZB, RP	opracowanie zbioru zadań
1.0	luty 2018	WS	stworzenie wersji elektronicznej zbioru
1.1	luty 2021	WS	aktualizacja zadań i modyfikacja szablonu
1.2	marzec 2021	WS	dodano nowe zadania ze statyki i środka ciężkości; zmieniono format numeracji zadań
1.21	marzec 2021	WS	uzupełniono wartość kąta α w zadaniu 3.6
1.22	kwiecień 2021	WS	poprawiono treść w zadaniu 6.3
1.23	kwiecień 2021	WS	dodano zadanie z połączeń śrubowych
1.24	kwiecień 2021	WS	w zadaniu 7.2 poprawiono treść polecenia
1.25	czerwiec 2021	WS	w zadaniu 7.1b pokazano na rysunku luz w otworze; w zadaniu 7.5 zmieniono grubość spoiny
1.26	grudzień 2022	WS	zmieniono stopkę i nagłówek szablonu
1.27	maj 2023	WS	w zadaniach z połączeń spawanych zmieniono współczynnik 'z' na 's'

ZB - Zdzisław Broniec

RP - Robert Pilch

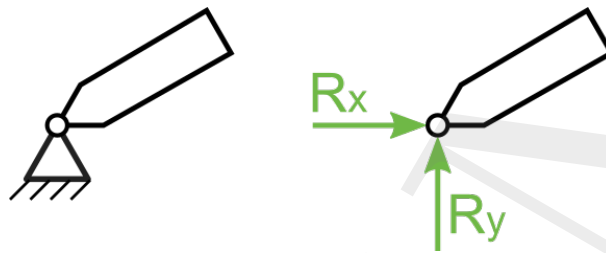
WS - Wojciech Sikora, wosikora@agh.edu.pl

Spis treści

1. Wybrane rodzaje podpór	2
2. Podstawy statyki	3
3. Środek ciężkości	8
4. Rozciąganie	11
5. Skręcanie	13
6. Zginanie	14
7. Połączenia	16

1 Wybrane rodzaje podpór

Podpora przegubowa stała



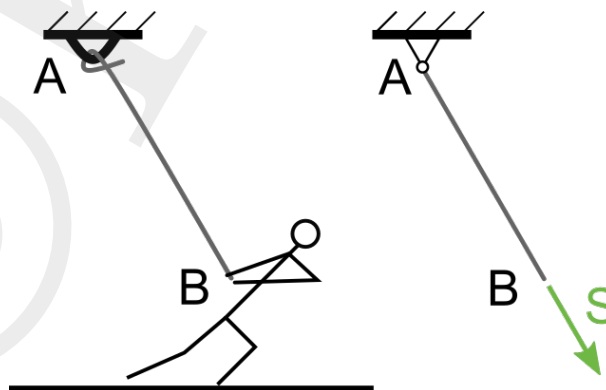
Podpora przegubowa przesuwna



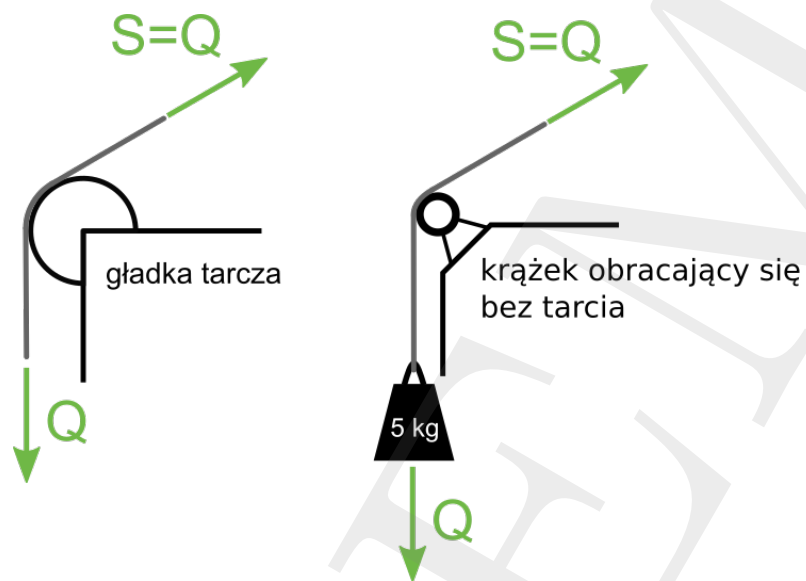
Utwierdzenie



Liny i cięgna



Lina podparta na krążku



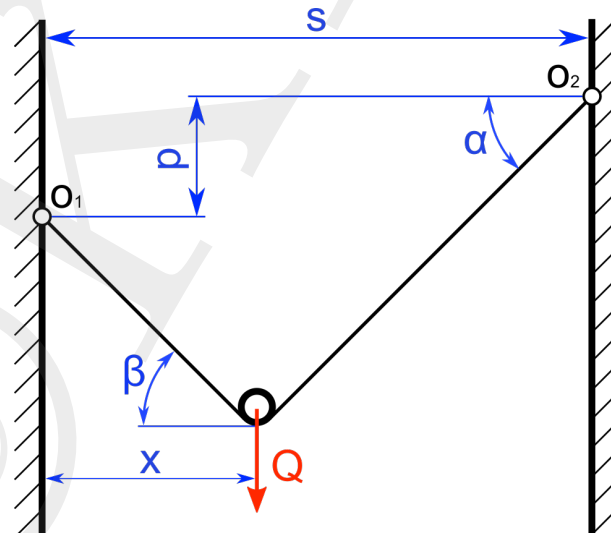
2 Podstawy statyki

Zadanie 2.1

Linę o długość l zawieszono między dwiema ścianami oddalonymi od siebie o odległość s . Przewyższenie między zamocowaniami liny wynosi p . Na linie umieszczono krążek obciążony ciężarem Q . Ustalić położenie równowagi układu oraz siłę naciągu liny S .

Dane:
 s, p, l, Q

Szukane:
 S, x



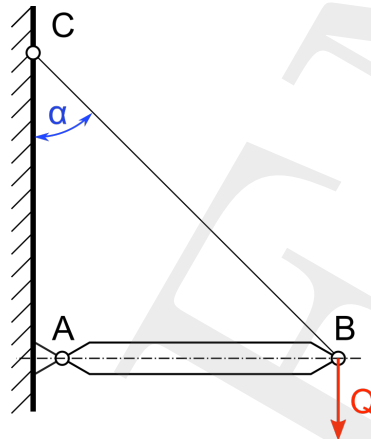
Zadanie 2.2

Lekki pręt, połączony przegubem z pionową ścianą, utrzymywany jest w położeniu poziomym za pomocą liny. Wyznaczyć siły w pręcie i linie.

Dane:

$$Q = 5 \text{ kN}$$

$$\alpha = 60^\circ$$



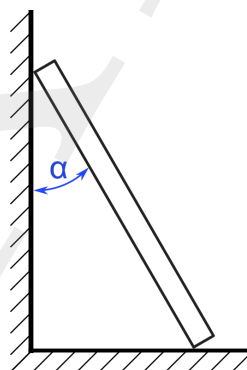
Zadanie 2.3

Pręt o ciężarze Q i długości l oparto o gładką pionową ścianę i chropowatą podłogę ($\mu = 0,2$). Wyznaczyć maksymalny kąt α o jaki może być odchylony pręt od pionu, aby pozostawał jeszcze w stanie równowagi.

Dane:

$$Q = 3 \text{ kN}$$

$$l = 2,5 \text{ m}$$



Zadanie 2.4

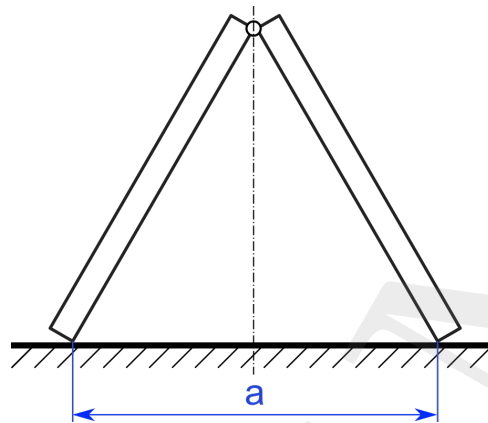
Drabinę składającą się z dwóch jednakowych, przegubowo połączonych części (każda o ciężarze Q i długości l) ustawiono na chropowatej (współczynnik tarcia μ) poziomej podłodze. Wyznaczyć największy rozstaw a dolnych końców drabiny, aby mogła ona jeszcze znajdować się w równowadze.

Dane:

$$Q = 0,5 \text{ kN}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

$$\mu = 0,25$$



Zadanie 2.5

Wyznaczyć reakcje podpór belki.

Dane:

$$P_1 = 5 \text{ kN}$$

$$P_2 = 10 \text{ kN}$$

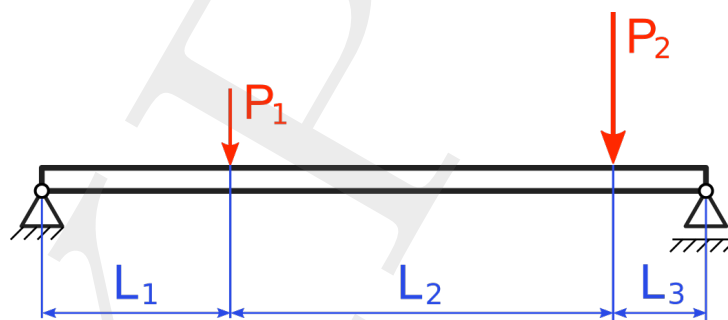
$$L_1 = 0,4 \text{ m}$$

$$L_2 = 0,8 \text{ m}$$

$$L_3 = 1,2 \text{ m}$$

Szukane:

$$R_A, R_B$$



Zadanie 2.6

Wyznaczyć reakcje podpór belki.

Dane:

$$P = 15 \text{ kN}$$

$$q = 9 \text{ kN/m}$$

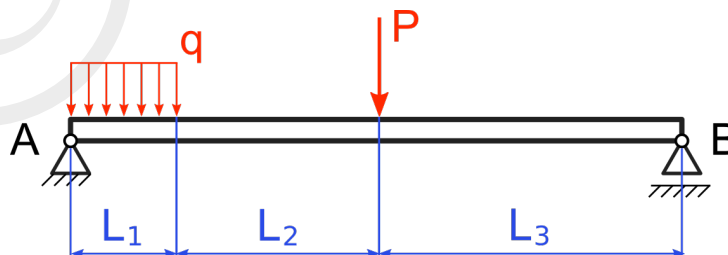
$$L_1 = 1 \text{ m}$$

$$L_2 = 2 \text{ m}$$

$$L_3 = 3 \text{ m}$$

Szukane:

$$R_A, R_B$$



Zadanie 2.7

Wyznaczyć reakcje podpór belki.

Dane:

$P = 10 \text{ kN}$

$q = 5 \text{ kN/m}$

$L_1 = 1 \text{ m}$

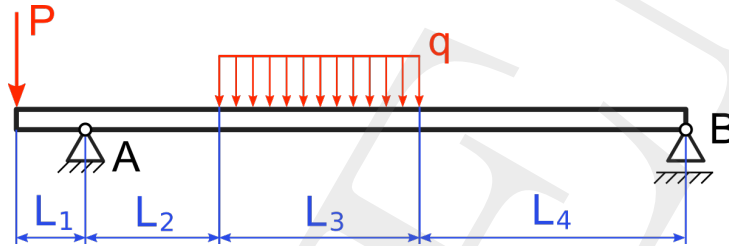
$L_2 = 2 \text{ m}$

$L_3 = 3 \text{ m}$

$L_4 = 4 \text{ m}$

Szukane:

R_A, R_B

**Zadanie 2.8**

Wyznaczyć reakcje podpór belki.

Dane:

$q = 2 \text{ kN/m}$

$P = 4 \text{ kN}$

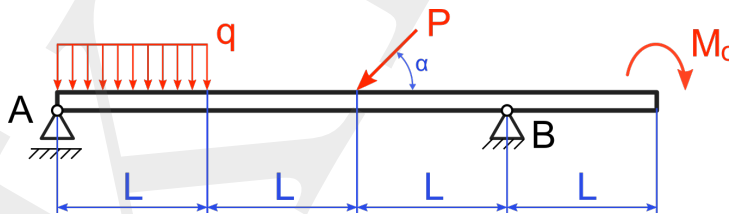
$L = 1 \text{ m}$

$M_o = 3 \text{ kNm}$

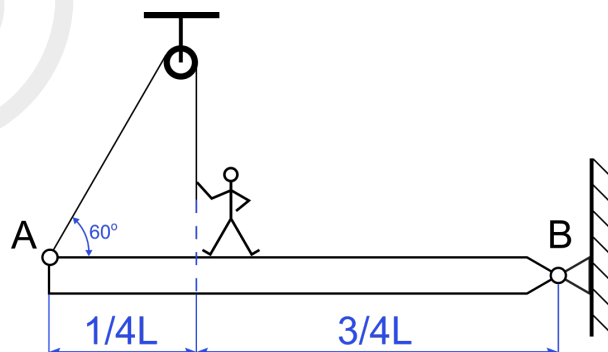
$\alpha = 45^\circ$

Szukane:

R_A, R_B

**Zadanie 2.9**

Belka AB o ciężarze $G = 500 \text{ N}$, połączona przegubowo końcem B ze ścianą, utrzymywana jest w położeniu poziomym za pomocą liny przywiązanej do końca A i ciągniętej przez człowieka o ciężarze $Q = 800 \text{ N}$, stojącego na tej belce. Lina przerzucona jest przez krążek C. Obliczyć jaką siłą S człowiek musi ciągnąć za linę.

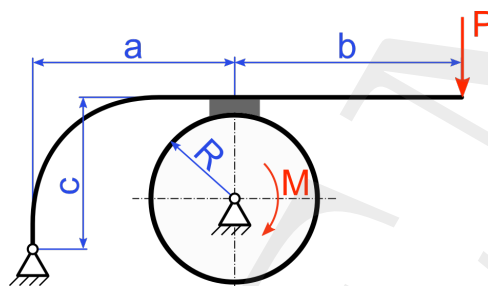


Zadanie 2.10

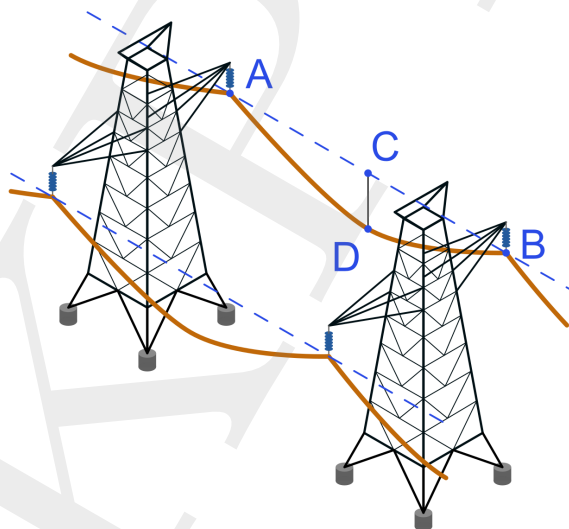
Oblicz siłę P w hamulcu klockowym potrzebną do zatrzymania bębna obracanego momentem M . Wymiary klocka można zaniedbać. Współczynnik tarcia klocka o bęben jest równy μ .

Dane:

M, R, a, b, c, μ

**Zadanie 2.11**

Między dwoma słupami zawieszona jest linia napowietrzna wysokiego napięcia. Ciężar przewodu jest równy Q , a odległość między słupami $AB = L$. Znając wartość strzałki zwisu przewodu $CD = f$ wyznacz siłę napięcia przewodu oraz reakcje w punktach zamocowania A oraz B .

**Zadanie 2.12**

Wyznacz reakcje w ramie.

Dane:

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

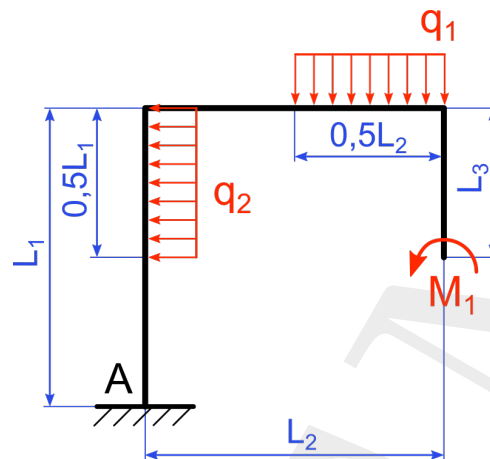
$$L_2 = 2 \text{ m}$$

$$L_3 = 1 \text{ m}$$

$$q_1 = 5 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 12 \text{ kN/m}$$

$$M_1 = 3 \text{ kNm}$$



Zadanie 2.13

Wyznacz reakcje w ramie.

Dane:

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

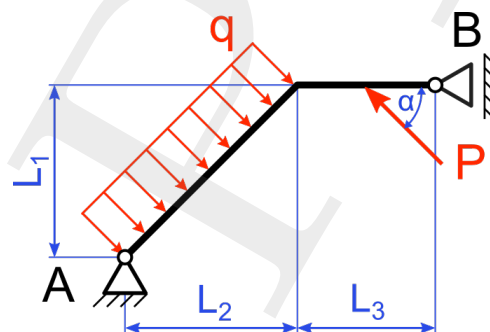
$$L_2 = 2 \text{ m}$$

$$L_3 = 1 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$q = 8 \text{ kN/m}$$

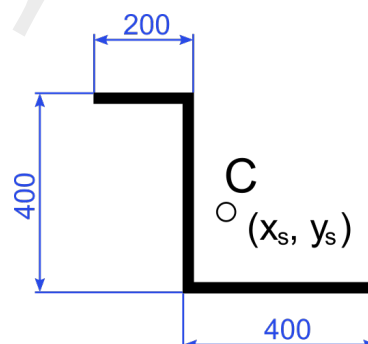
$$P = 5 \text{ kN}$$



3 Środek ciężkości

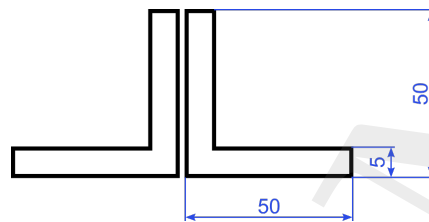
Zadanie 3.1

Drut o długości 1 m wygięto w sposób pokazany na rysunku. Wyznaczyć położenie środka ciężkości.

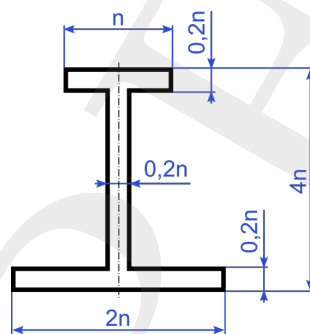


Zadanie 3.2

Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola przekroju belki złożonej z dwóch jednakowych kątowników o wymiarach $50 \times 50 \times 5 \text{ mm}$.

**Zadanie 3.3**

Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola figury jak na rysunku. Wymiary w $[cm]$.

**Zadanie 3.4**

W metalowej tarczy wywiercono cztery otwory. Niestety w wyniku błędu, otwory zostały wykonane w niewłaściwym położeniu i tarcza będzie niewyważona jeżeli otwór pod wałek będzie umieszczony w środku tarczy. Wyznacz położenie środka ciężkości tarczy przedstawionej na rysunku, gdzie D - średnica tarczy, d - średnica każdego z czterech otworów. Czy przemieszczenie otworów będzie miało istotny wpływ na położenie środka ciężkości tarczy?

Dane:

$$D = 200 \text{ mm}$$

$$d = 40 \text{ mm}$$

$$r_1 = 76 \text{ mm}$$

$$\alpha_1 = 12^\circ$$

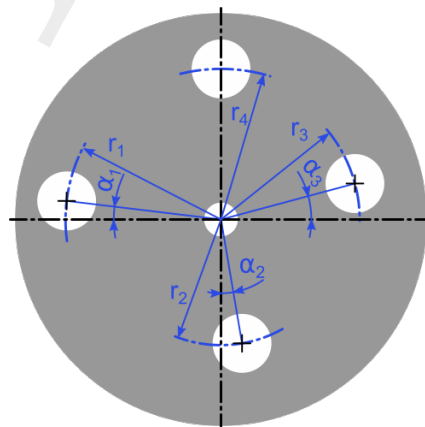
$$r_2 = 76 \text{ mm}$$

$$\alpha_2 = 5^\circ$$

$$r_3 = 60 \text{ mm}$$

$$\alpha_3 = 18^\circ$$

$$r_4 = 70 \text{ mm}$$

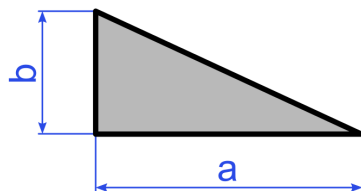


Zadanie 3.5

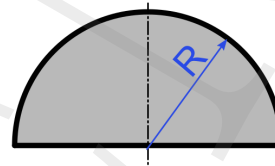
Wyznacz położenie środka ciężkości a) trójkąta, b) połowy koła korzystając z zależności:

$$A \cdot y_c = \int_A y \, dA$$

$$A \cdot x_c = \int_A x \, dA$$



(a)



(b)

Zadanie 3.6

W wibratorach bezwładnościowych (rys. a¹) do regulacji siły wykorzystuje się niewyważone segmenty (rys. b) umieszczone na wale dwustronnego silnika elektrycznego. W oparciu o rys. b wyznacz położenie środka ciężkości pojedynczego segmentu względem osi wału. Oblicz współrzędne środka ciężkości dla układu złożonego z dwóch segmentów (rys. c) obróconych względem siebie o kąt α .

Dane:

$$a = 30 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

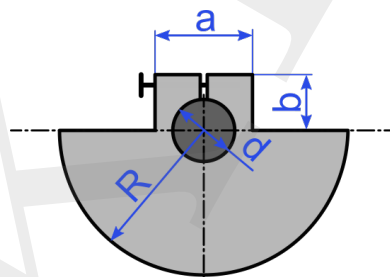
$$d = 20 \text{ mm}$$

$$R = 80 \text{ mm}$$

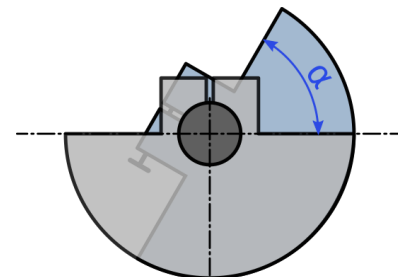
$$\alpha = 30^\circ$$



(a)



(b)



(c)

¹ źródło www.renold.com

4 Rozciąganie

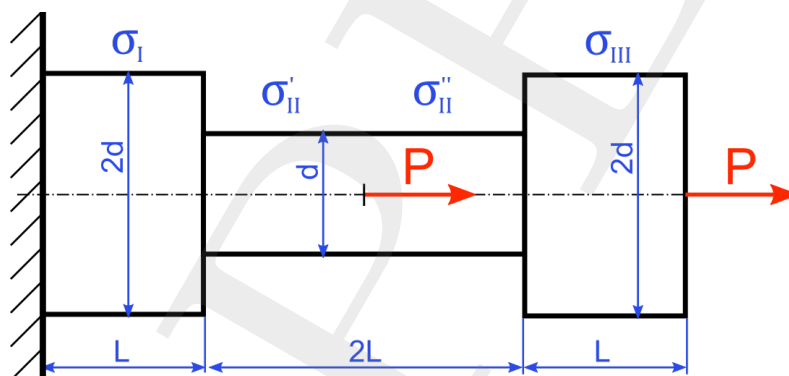
Zadanie 4.1

Zaprojektowano pręt o wymiarach i obciążeniu jak na rysunku.

$$\begin{aligned} P &= 50 \text{ kN} \\ L &= 100 \text{ cm} \\ d &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ R_e &= 400 \text{ MPa} \\ x_e &= 1,6 \end{aligned}$$

- 1) Wyznaczyć naprężenia w poszczególnych przekrojach $\sigma_I, \sigma'_{II}, \sigma''_{II}, \sigma_{III}$.
- 2) Wykonać wykres naprężeń $\sigma = f(x)$.
- 3) Obliczyć całkowite wydłużenie pręta ΔL [μm].
- 4) Czy dany element ma prawidłową średnicę d ?

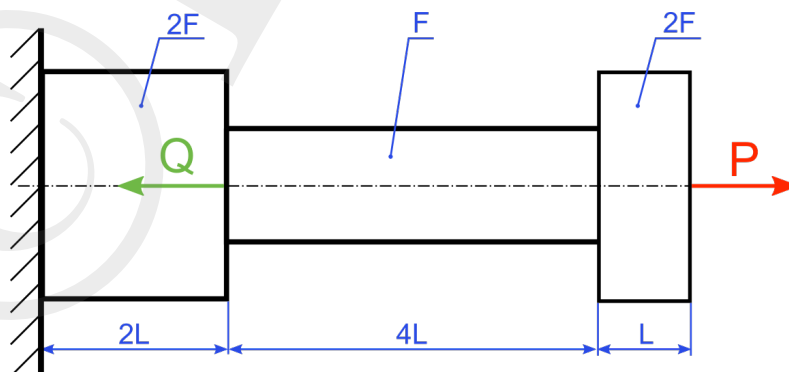


Zadanie 4.2

Zaprojektowano pręt o wymiarach i obciążeniu jak na rysunku. Wyznaczyć siłę Q jaką należy przyłożyć we wskazanym miejscu aby wydłużenie całkowite pręta wynosiło zero ($\Delta L_c = 0$).

$$\begin{aligned} P &= 50 \text{ kN} \\ F &= 7 \text{ cm}^2 \\ L &= 80 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$



Zadanie 4.3

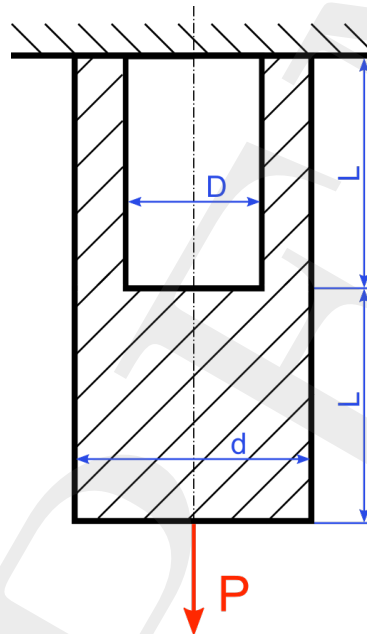
Pręt okrągły o rozmiarach jak na rysunku jest rozciągany siłą nieznaną P . Wyznaczyć nośność pręta P [kN].

$$L = 65 \text{ cm}$$

$$D = 40 \text{ mm}$$

$$d = 50 \text{ mm}$$

$$k_r = 100 \text{ MPa}$$

**Zadanie 4.4**

Przewody wykonane ze stali, miedzi i aluminium o średnicy $d = n$ [mm] wykorzystano do przesyłu energii elektrycznej z punktu umieszczonego na pewnej wysokości nad ziemią. Przyjmując $g = 9,81 \text{ m/s}^2 = \text{const.}$ należy obliczyć jaką mogą one mieć maksymalną długość.

$$\rho_{Cu} = 8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

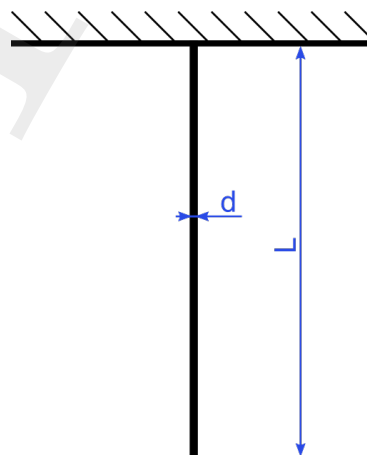
$$\rho_{Fe} = 7700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{Al} = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$Rm_{Cu} = 210 \text{ MPa}$$

$$Rm_{Fe} = 700 \text{ MPa}$$

$$Rm_{Al} = 100 \text{ MPa}$$



Zadanie 4.5

Przyjmijmy jednakowe pola przekroju prętów $F_a = F_s = F$. Pręty te są ze sobą trwale połączone. W wyniku wzajemnych oddziaływań, pod wpływem temperatury w prętach powstaną siły wewnętrzne $P_a = P_s = P$; dla pręta aluminiowego - siła ściskająca, dla pręta stalowego - siła rozciągająca.

- 1) Dla jakiego ΔT pręt aluminiowy ulegnie trwałemu odkształceniu, czyli odkształcenia w przecie przekroczą wartość odpowiadającą wartości $R_{e,a}$?
- 2) O ile zmieni się długość pręta aluminiowego lub stalowego (w [mm]) po ogrzaniu układu o wyznaczony przyrost temperatury ΔT ?

$$l_0 = 0,45 \text{ m}$$

$$\alpha_a = 24 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$\alpha_s = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$E_a = 0,73 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_s = 2,10 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$R_{e,a} = 50 \text{ MPa}$$

$$R_{e,s} = 300 \text{ MPa}$$

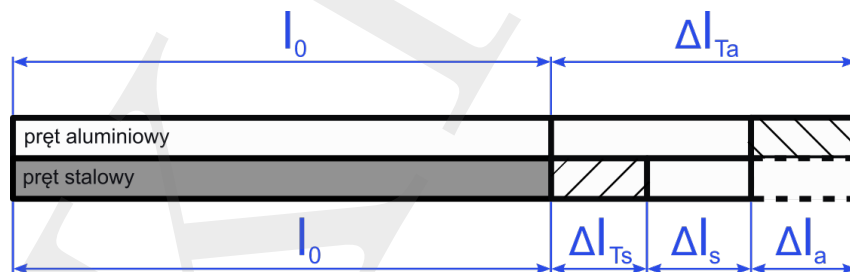
$$\Delta l = \Delta l_{Ta} - \Delta l_a = \Delta l_{Ts} + \Delta l_s$$

$$\Delta l_{Ta} = \alpha_a \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

$$\Delta l_{Ts} = \alpha_s \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

$$\Delta l_a = \frac{P_a \cdot l_0}{E_a \cdot F_a}$$

$$\Delta l_s = \frac{P_s \cdot l_0}{E_s \cdot F_s}$$

**5 Skręcanie****Zadanie 5.1**

Dla skręcanego wału o wymiarach jak na rysunku wyznaczyć:

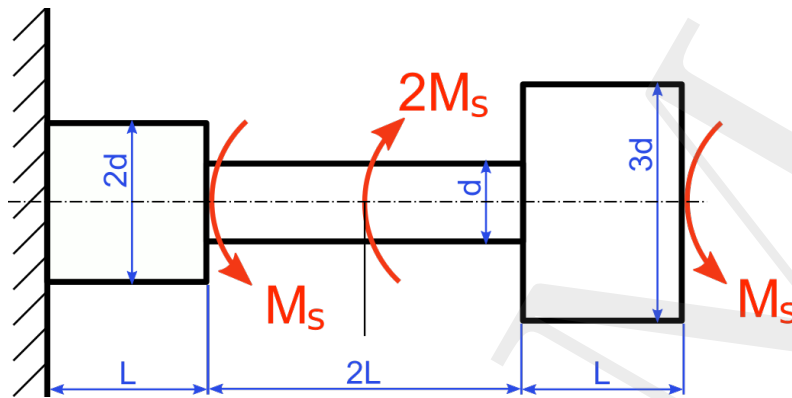
- a) moment utwardzenia M_u ,
- b) całkowity kąt skręcenia ϕ_c ,
- c) wykres zmian naprężenia stycznego $\tau = f(x)$.

$$M_s = 115 \text{ Nm}$$

$$L = 80 \text{ cm}$$

$$d = 3 \text{ cm}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$



Zadanie 5.2

Dla skręcanego wału (drażonego) o wymiarach jak na rysunku wyznaczyć:

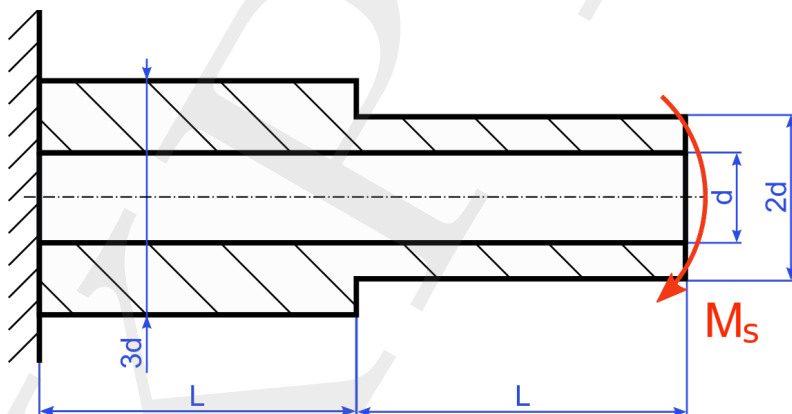
- średnicę d w $[mm]$,
- kąt skręcenia ϕ .

$$M_s = 150 \text{ Nm}$$

$$L = 120 \text{ cm}$$

$$k_s = 50 \text{ MPa}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$



6 Zginanie

Zadanie 6.1

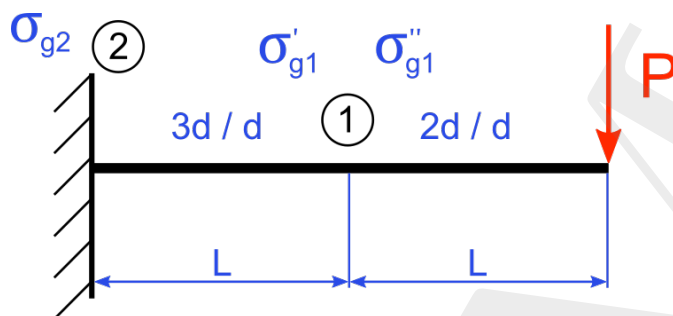
Dla zginanej belki o przekroju rurowym jak na rysunku:

- zapisać równania momentów $M_g(x)$,
- sporządzić wykres momentów gnących $M_g(x)$,
- wyznaczyć naprężenia gnące w punktach 1 ($\sigma'_{g1}, \sigma''_{g1}$) oraz 2 (σ_{g2}).

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$L = 700 \text{ mm}$$

$$P = 14500 \text{ N}$$



Zadanie 6.2

Dla zginanej belki jak na rysunku:

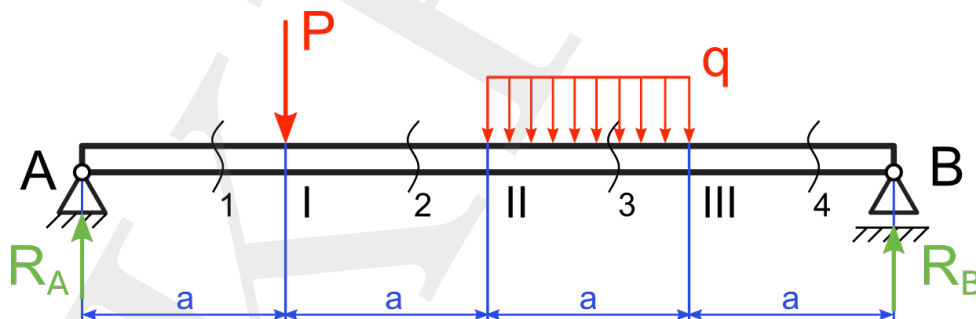
- zapisać równania momentów $M_g(x)$,
- sporządzić wykres momentów gnących $M_g(x)$,
- wyznaczyć wartości M_g w punktach I, II oraz III,
- wyznaczyć współrzędną x odpowiadającą maksymalnej wartości momentu gnącego,
- wyznaczyć średnicę belki w obliczonym punkcie x .

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$P = 5500 \text{ N}$$

$$a = 0,9 \text{ m}$$

$$k_g = 100 \text{ MPa}$$



Zadanie 6.3

Dla zginanej belki (wybrać z zadań 2.5 do 2.8):

- zapisać równania momentów $M_g(x)$,
- sporządzić wykres momentów gnących $M_g(x)$,

Zadanie 6.4

Dla elementu przedstawionego na rysunku:

- narysować wykres momentu skręcającego $M_s(x)$,
- narysować wykres momentu gnącego $M_g(x)$,
- zapisać równania momentu zastępczego $M_z(x)$,
- wyznaczyć średnicę pręta w miejscu utwierdzenia w [mm].

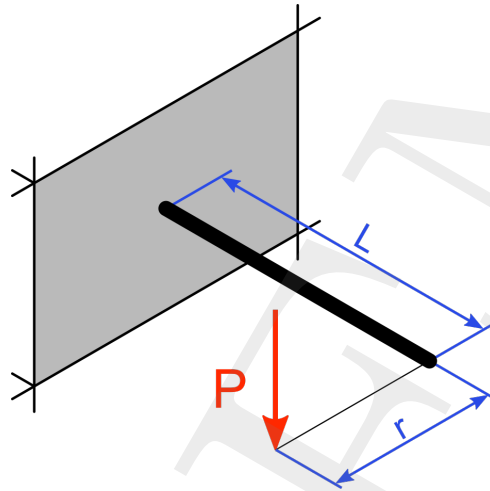
$$P = 1250 \text{ N}$$

$$r = 50 \text{ cm}$$

$$L = 120 \text{ cm}$$

$$\alpha = k_g/k_s = \sqrt{3}$$

$$k_g = 100 \text{ MPa}$$



7 Połączenia

Zadanie 7.1

Wyznaczyć średnicę śruby d [mm] dla dwóch przypadków:

- śruba jest "ciasno" ciasno pasowana,
- śruba jest "luźno" pasowana.

$$P = 4,5 \text{ kN}$$

$$s = 15 \text{ mm}$$

$$g = 20 \text{ mm}$$

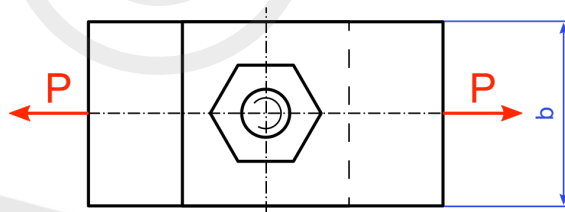
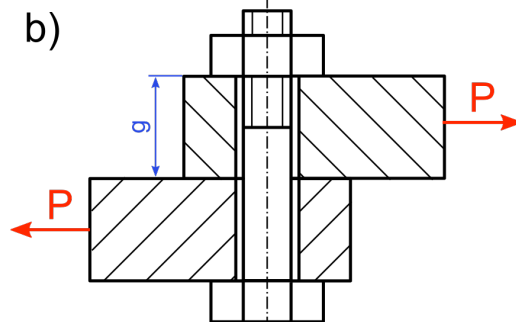
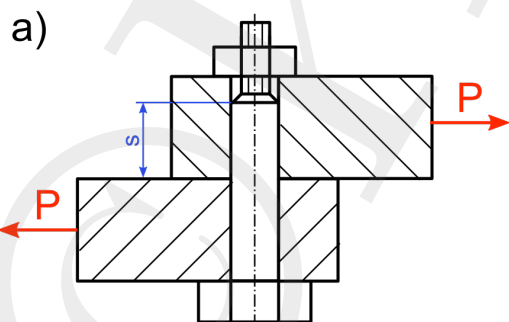
$$b = 100 \text{ mm}$$

$$\mu = 0,15$$

$$k_t = 75 \text{ MPa}$$

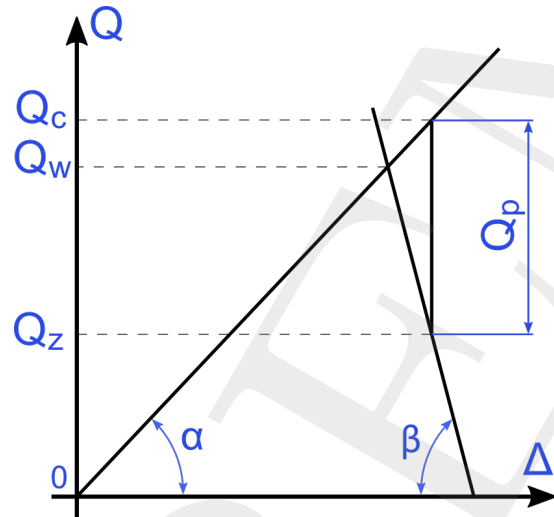
$$k_r = 200 \text{ MPa}$$

$$p_{dop} = 100 \text{ MPa}$$



Zadanie 7.2

W podanym układzie śrubowym wymagany zacisk roboczy wynosi $Q_z = 0,2 Q_p$ zaś obciążenie zewnętrzne (robocze) $Q_p = 10 \text{ kN}$. Sztywność elementów zaciskanych (kołnierz, uszczelka) wynosi: $c_k = 3 \cdot 10^5 \text{ N/mm}$, zaś sztywność elementów rozciąganych (śruba) wynosi $c_s = 1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}$.



$$c_s = tg \alpha$$

$$c_k = tg \beta$$

dla śrub metrycznych:

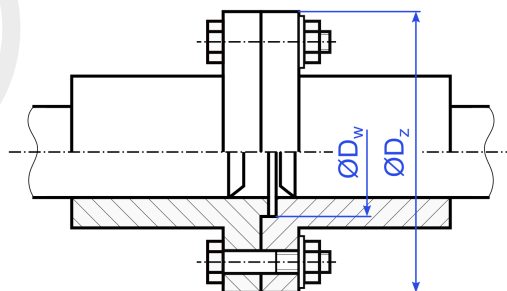
$$d_{tarcia} \approx 1,2 d \text{ (średnica tarcia nakrętki o}$$

powierzchnię oporową)

Wyznaczyć wartość napięcia wstępnego $Q_w = ?$ [N]. Dobrać średnicę śruby. Obliczyć całkowity moment dokręcenia nakrętki $M_{dokr} = M_S + M_T$ potrzebny do wywołania napięcia wstępnego Q_w , gdzie M_S - moment tarcia na gwincie, M_T - moment tarcia nakrętki o powierzchnię oporową. Klasę własności mechanicznych śruby przyjąć równą 4.8, współczynnik bezpieczeństwa $x_e = 1,6$, współczynnik tarcia $\mu = 0,1$. Przyjąć, że jest to pojedyncza śruba luźno pasowana. Zadanie rozwiązać analitycznie oraz - nieobowiązkowo - graficznie w podziałce (dotyczy etapu wyznaczenia Q_w).

Zadanie 7.3

Oblicz wymaganą średnicę śruby luźno pasowanej dla sztywnego sprzęgła kołnierzowego o wymiarach $D_z = 200 \text{ mm}$, $D_w = 100 \text{ mm}$. Nośność sprzęgła powinna pozwolić na przeniesienie mocy równej 25 kW przy prędkości $n = 400 \text{ obr/min}$. Klasę własności mechanicznych śruby przyjmij jako 5.6.. Zaproponuj liczbę śrub. Załóż, że siła tarcia działa na średnim promieniu powierzchni kontaktu. Współczynnik tarcia w obliczeniach przyjmij $\mu = 0,15$.



Zadanie 7.4

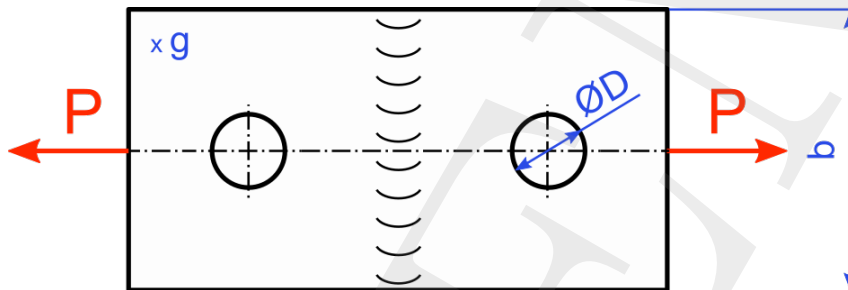
Dwa płaskowniki ze stali S235 o grubości $g = 10 \text{ mm}$ połączone spoiną czołową i obciążono siłą rozciągającą $P = 120 \text{ kN}$. Obliczyć szerokość płaskownika b [mm] (w którym wycięto otwory) konieczną do przeniesienia danego obciążenia.

$$D = 16 \text{ mm}$$

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$x_e = 1,7$$

$$s = 0,85 \text{ (dla rozciąganej spoiny czołowej)}$$

**Zadanie 7.5**

Wspornik ze stali S235 przyspawano do słupa stalowego i obciążono siłą $P = 25 \text{ kN}$. Sprawdzić naprężenia w spoinie pachwinowej.

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$l = 120 \text{ mm}$$

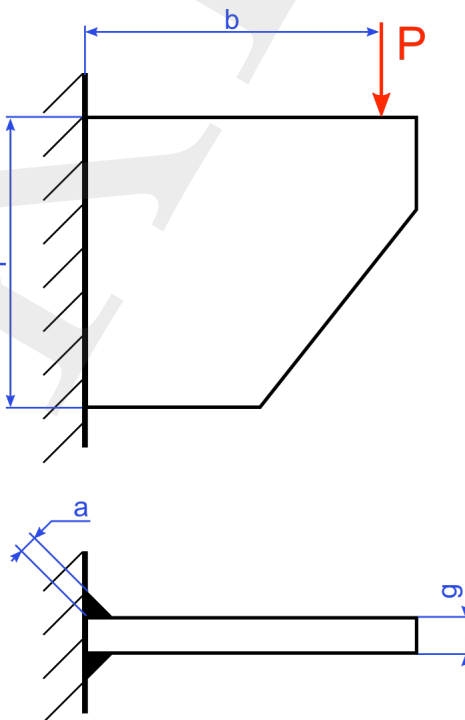
$$b = 80 \text{ mm}$$

$$a = 5 \text{ mm}$$

$$g = 10 \text{ mm}$$

$$x_e = 2$$

$$s = 0,65 \text{ (dla spoin pachwinowych)}$$



Zadanie 7.6

Dobierz długość wpustu dla połączenia wału $\varnothing 46$ z kołem pasowym obciążonego momentem skręcającym wynoszącym 60 Nm . Piasta koła wykonana jest ze stopu aluminium o $Re = 240 \text{ MPa}$

wał $\varnothing 46 \Rightarrow b \times h = 14 \times 9$

$x_e = 4$

$p_{dop} = 0,5 k_c$

$k_c = k_r$ (dla metali)

