

Identyfikacja i modelowanie struktur i procesów biologicznych

Analogowe i cyfrowe metody filtracji sygnałów. Filtr Kalmana.

Cel ćwiczenia:

Poznanie metod analogowej i cyfrowej filtracji sygnałów; filtr (obserwator stanu) Kalmana (środowisko MATLAB/Simulink).

1. Wprowadzenie

Filtr jest podstawowym blokiem stosowanym w przetwarzaniu sygnałów. Ze względu na rodzaj przetwarzanych sygnałów filtry dzieli się na:

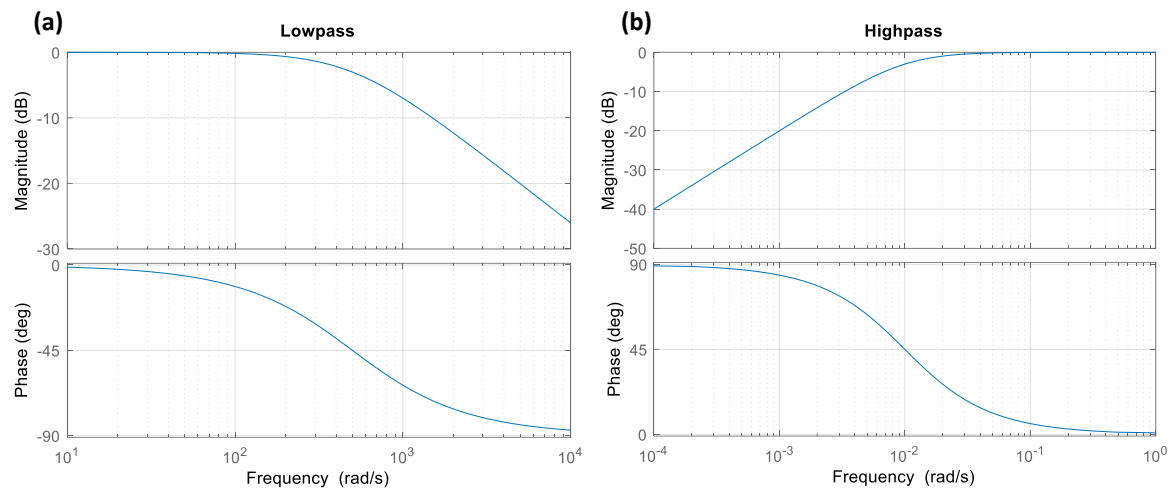
- Analogowe - przetwarzanie sygnałów analogowych (tj. sygnałów, których parametr informacyjny może przyjmować nieskończenie wiele wartości).
- Cyfrowe - przetwarzanie sygnałów cyfrowych (parametr informacyjny sygnału cyfrowego / binarnego może przyjmować określoną liczbę / dwa poziomy wartości); rodzaje filtrów cyfrowych:
 - o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR),
 - o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR),
 - średnia krocząca,
 - filtry adaptacyjne.

Ze względu na zapotrzebowanie na energię potrzebną do działania, filtry dzieli się na:

- Pasywne - do poprawnego działania nie potrzebują dodatkowego zewnętrznego źródła energii (bazują tylko na energii sygnału wejściowego), np. proste obwody RC lub LC.
- Aktywne - do poprawnego działania potrzebują dodatkowego zewnętrznego źródła energii (wykorzystują wzmacniacze sygnału), np. układy wzmacniaczy operacyjnych.

Ze względu na zakres częstotliwości przepuszczanych i blokowanych przez filtr, filtry można podzielić na (patrz Rys. 1):

- dolnoprzepustowe - filtry, które przepuszczają sygnały o częstotliwości niższej niż częstotliwość graniczna i tłumią sygnały o wyższej częstotliwości,
- górnoprzepustowe - filtry, które przepuszczają sygnały o częstotliwości wyższej niż częstotliwość graniczna i tłumią sygnały o niższej częstotliwości,
- pasmowo-przepustowe - filtry, które przepuszczają sygnały w pewnym zakresie częstotliwości i tłumią sygnały o częstotliwościach spoza tego zakresu,
- pasmowo-zaporowe - filtry, które tłumią sygnały z pewnego zakresu częstotliwości i przepuszczają sygnały o częstotliwościach spoza tego zakresu.



Rys. 1. Charakterystyki logarytmiczne filtrów pierwszego rzędu (np. pasywnych obwodów RC 1.rzędu): (a) dolnoprzepustowy, (b) górnoprzepustowy

2. Konstrukcje i charakterystyki filtrów

Filtr Czebyszewa

Filtry Czebyszewa są stosowane, gdy najważniejszym kryterium jest duże tłumienie w paśmie zaporowym, a jednocześnie dopuszczalna jest zmiana wielkości w paśmie przepustowym. Ich charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe charakteryzują się zafalowaniem i bardzo ostrym załamaniem (im ostrzejsze załamanie, tym większe zafalowanie, co jest związane ze wzrostem rzędu filtru).

- Charakterystyka amplitudowa filtru Czebyszewa typu I posiada zafalowania (o równej amplitudzie) w paśmie przepustowym i monotonicznie opada w paśmie zaporowym (rys. 2(a)). Charakterystyka amplitudowa filtru Czebyszewa typu II jest monotoniczna w paśmie przepustowym i posiada zafalowania (o równej amplitudzie) w paśmie zaporowym (Fig. 2(b)).

Filtr Butterwortha

Filtry Butterwortha są stosowane, gdy najważniejszym kryterium jest to, aby charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa w paśmie przepustowym była możliwie płaska, z wyraźnym załamaniem przy częstotliwości granicznej.

- Charakterystyka amplitudowa filtru Butterwortha jest płaska w paśmie przepustowym i monotoniczna w całym zakresie częstotliwości (Fig. 2(c)).

Filtr Bessela

Filtry Bessela są stosowane tam, gdzie najważniejszym kryterium jest jak najwierniejsze odwzorowanie przebiegu sygnału w paśmie przenoszenia, co uzyskuje się przy możliwie płaskiej charakterystyce opóźnienia grupowego. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa jest płaska w paśmie przepustowym, natomiast ostrość zbrocza jest większa

niż w przypadku prostych filtrów RC. Jest to preferowany filtr dla impulsów prostokątnych dzięki spełnieniu warunku stałości opóźnienia grupowego w szerokim zakresie częstotliwości (przesunięcie fazowe jest proporcjonalne do częstotliwości).

- Charakterystyka amplitudowa filtra Bessela jest możliwie płaska w paśmie przepustowym i monotoniczna w całym zakresie (Fig. 2(d)). Filtr ma liniową odpowiedź fazową.

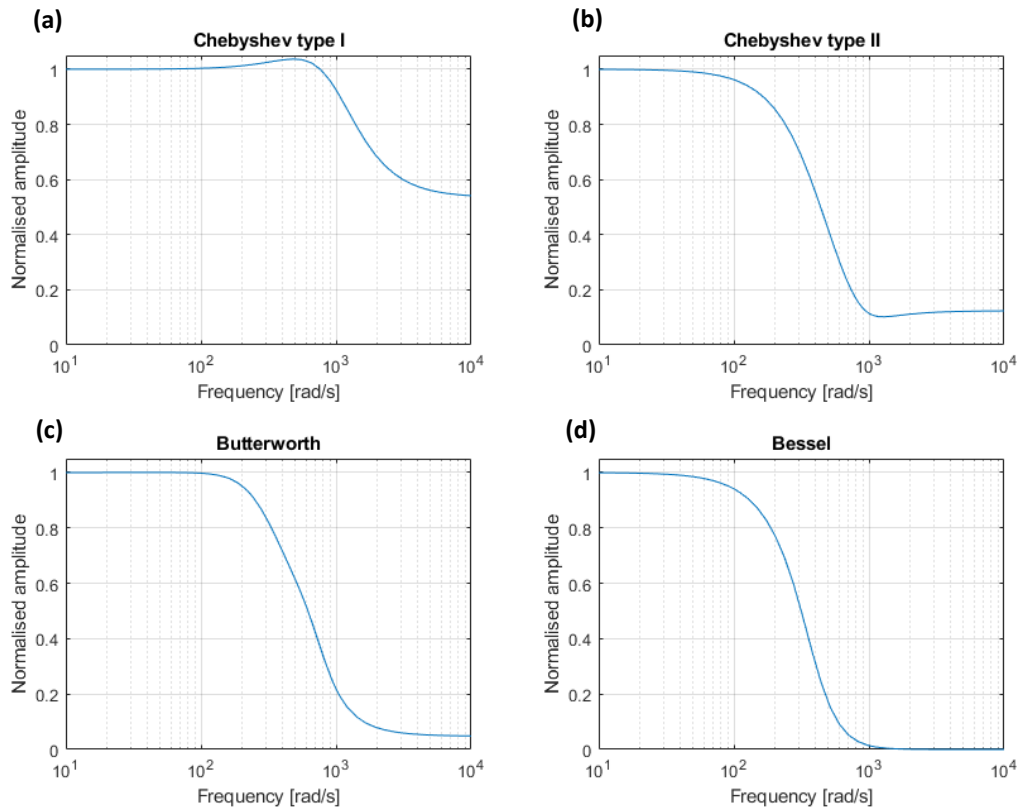


Fig. 2. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe filtrów 4.rzędu: a) Czebyszewa typu I, b) Czebyszewa typu II, c) Butterwortha, d) Bessela

3. Filtry analogowe i cyfrowe

Cechy charakterystyczne *filtrów analogowych*:

- łagodne, nieostre przejście między pasmem przepustowym, a zaporowym,
- nieliniowa faza,
- mniejsza dokładność wynikająca z tolerancji elementów,
- dryft własności spowodowany zmiennością komponentów,
- trudne do modelowania i projektowania,
- filtry adaptacyjne trudne w implementacji,
- filtry analogowe są wymagane przy wysokich częstotliwościach i własnościach antyaliasingowych,
- nie są wymagane przetworniki A/C i C/A, ani procesory DSP.

Cechy charakterystyczne *filtrów cyfrowych*:

- wysoka dokładność,
- faza liniowa (filtry FIR),
- brak dryftu spowodowanego zmianami w komponentach,
- duża odporność na zakłócenia i zniekształcenia amplitudy,
- możliwość elastycznego, adaptacyjnego filtrowania,
- łatwość modelowania i projektowania,
- obliczenia muszą być zakończone podczas okresu próbkowania – ogranicza to możliwości zastosowań w czasie rzeczywistym,
- wymagane są wysokowydajne przetworniki A/C i C/A oraz procesory DSP do zastosowań w czasie rzeczywistym (wymagania zależą od częstotliwości próbkowania i złożoności filtru).

Zakładając zakres pasma przetwarzanego sygnału analogowego f_a , wymagana jest częstotliwość próbkowania przetwornika A/C spełniająca warunek Nyquista-Shannona: $f_s \geq 2f_a$ (okres próbkowania wynosi $1/f_s$). Wszystkie obliczenia filtru cyfrowego (łącznie z dodatkowym obciążeniem związanym m.in. z obsługą danych) muszą być zakończone podczas okresu próbkowania. Czas obliczeń zależy od rzędu filtru (liczby przetwarzanych próbek wejściowych) oraz od szybkości i wydajności procesora DSP. Każdy stopień filtru wymaga jednego mnożenia i jednego dodawania (ang. *multiply-accumulate, MAC*).

Istnieją dwa podstawowe typy filtrów cyfrowych: o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR) i o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR). Zmieniając wartości współczynników i rząd filtru, w filtrze FIR można uzyskać praktycznie dowolną charakterystykę częstotliwościową. Filtry FIR mogą osiągać poziomy wydajności, które nie są osiągalne w przypadku filtrów analogowych (takie jak idealnie liniowa charakterystyka fazowa). Jednak wysokowydajne filtry FIR wymagają na ogół dużej liczby operacji arytmetycznych *MAC* i dlatego wymagają szybkich i wydajnych procesorów DSP. Z drugiej strony, filtry IIR mogą naśladować działanie tradycyjnych filtrów analogowych i wykorzystywać sprzężenie zwrotne. Dlatego ich odpowiedź impulsowa rozciąga się na nieskończony okres czasu. Ze względu na sprzężenie zwrotne, filtry IIR mogą być implementowane z mniejszą liczbą współczynników niż w przypadku filtrów FIR. Filtry cyfrowe mogą być stosowane w aplikacjach filtracji adaptacyjnej ze względu na ich szybkość i łatwość zmiany charakterystyki przez zmianę współczynników filtru.

Cechy filtrów FIR:

- Liniowa faza
- Łatwe do zaprojektowania
- Wymagające obliczeniowo

Cechy filtrów IIR:

- Oparte na klasycznych filtrach analogowych
- Wydajne obliczeniowo

Zalety układów analogowych w porównaniu z technikami cyfrowymi:

- Szybkość – nawet proste wzmacniacze operacyjne mogą pracować z częstotliwością od 100 kHz do 1 MHz,

- Zakres dynamiczny amplitudy – stosunek największego sygnału, jaki może być przepuszczony, do szumów własnych układu; np. 12-bitowy przetwornik A/C daje zakres dynamiczny około 14000; dla porównania, standardowy wzmacniacz operacyjny ma zakres dynamiki około dziesięciu milionów,
- Zakres dynamiczny częstotliwości – układ wzmacniacza operacyjnego może obsługiwać częstotliwości z zakresu od 0.01 Hz do 100 kHz (7 dekad); w technice cyfrowej wymagałoby to f_s równej 200 kHz, a więc do uchwycenia jednego pełnego cyklu o częstotliwości 0.01 Hz potrzeba 20 milionów próbek. W filtrach cyfrowych często używa się liniowej skali częstotliwości, aby pokazać ich wydajność, podczas gdy filtry analogowe potrzebują skali logarytmicznej, aby pokazać ich duży zakres dynamiki.

Zalety technik cyfrowych w porównaniu z układami analogowymi:

- Płaskość pasma przenoszenia, jaką można uzyskać w filtrach analogowych, jest ograniczona dokładnością rezystorów i kondensatorów. Nawet w przypadku projektowania filtru Butterwortha (0% zafalowań) można się spodziewać zafalowań resztkowych rzędu 1%. Płaskość charakterystyk przenoszenia filtrów cyfrowych jest ograniczona głównie przez błąd zaokrąglenia, co sprawia, że są one setki razy bardziej płaskie niż charakterystyki przenoszenia ich analogowych odpowiedników.
- Filtry cyfrowe są lepsze zarówno pod względem ostrości (tłumienia) przejścia między pasmem przepustowym, a zaporowym, jak i tłumienia w paśmie zaporowym. Nawet jeśli działanie filtrów analogowych zostanie poprawione poprzez podniesienie rzędu, nie dorównają one filtrom cyfrowym w tym zakresie.

W środowisku MATLAB/Simulink, blok *Analog Filter Design* może zostać wykorzystany do zaprojektowania filtru analogowego wymaganego typu, rzędu, częstotliwości granicznej i zafalowania pasma przepustowego, podczas gdy blok *Digital Filter Design* jest przeznaczony do projektowania, analiz i realizacji filtrów FIR oraz IIR zgodnie z wymaganą charakterystyką.

4. Filtr (obserwator) Kalmana

Do odtwarzania stanów niemierzalnych stosuje się filtr (obserwator stanu) Kalmana. Metoda ta zapewnia pełną estymację stanu z uwzględnieniem szumów pomiarowych i procesowych. Rozważmy następujący system:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_k u(k) + \boldsymbol{\vartheta}(k) \\ y(k) &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \psi(k) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{x} = [q \ v \ a]^T$ jest wektorem stanu, który zawiera przemieszczenie q , prędkość v i przyspieszenie a , podczas gdy $\boldsymbol{\vartheta}(k)$ oraz $\psi(k)$ są niezależnymi białymi szumami (tj. sygnałami losowymi o stałej gęstości widmowej mocy): procesowym i pomiarowym (odpowiednio), o rozkładzie normalnym (Gausa) gęstości prawdopodobieństwa, spełniającymi warunki (\mathbf{Q}_k, R_k – macierze kowariancji):

$$E[\boldsymbol{\vartheta}(k)] = \mathbf{0}, \quad E[\psi(k)] = 0, \quad E[\boldsymbol{\vartheta}(k)\boldsymbol{\vartheta}^T(k)] = \mathbf{Q}_k, \quad E[\psi(k)\psi^T(k)] = R_k.$$

Zakładając, że mierzone są tylko przemieszczenia, tj. wyjście $y(k) = q(k)$ jest zmierzoną wartością przemieszczenia w k -tym kroku czasowym, przyjmuje się następujące macierze $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$, oraz \mathbf{H}_k w układzie (1):

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2/2 \\ 0 & 1 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_k = [1 \quad 0 \quad 0],$$

gdzie t_0 jest okresem próbkowania (dyskretyzacji). Do celów obliczeniowych przyjmuje się następujące wartości macierzy kowariancji \mathbf{Q}_k, R_k (v, r są stałymi dostrajania):

$$\mathbf{Q}_k = v \begin{bmatrix} t_0^5/20 & t_0^4/8 & t_0^3/6 \\ t_0^4/8 & t_0^3/3 & t_0^2/2 \\ t_0^3/6 & t_0^2/2 & t_0 \end{bmatrix}, \quad R_k = [r].$$

Rozważany algorytm filtru Kalmana składa się z dwóch podstawowych kroków: *predykcji* i *korekcji*.

Predykcja (aktualizacja czasowa):

$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k$ – estymowana a priori wartość stanu \mathbf{x}_k ,

$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k$ – estymowana a priori kowariancja błędu $\mathbf{P}_k = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]$.

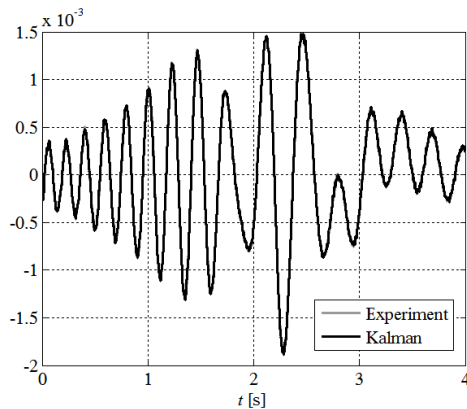
Korekcja (aktualizacja pomiarowa):

$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + R_k)^{-1}$ – wzmocnienie filtru Kalmana,

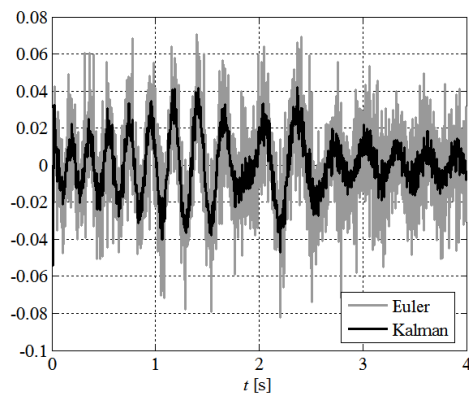
$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [q(k) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-]$ – optymalna estymata stanu \mathbf{x}_k (a posteriori),

$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$ – optymalna estymata kowariancji błędu (a posteriori).

Powyższy algorytm można zaimplementować w środowisku MATLAB/Simulink. Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono porównanie odpowiedzi czasowych przemieszczenia q (wyznaczonego podczas eksperymentu i estymowanego za pomocą filtru Kalmana) oraz prędkości v . Estymowana prędkość v została porównana z prędkością obliczoną przez proste różniczkowanie przemieszczenia q metodą Eulera. W przypadku przemieszczeń, odpowiedzi czasowe praktycznie się pokrywają (Rys. 3). Analiza przebiegów prędkości (Rys. 4) wskazuje na przewagę filtru Kalmana nad metodą prostego różniczkowania.



Rys. 3. Porównanie odpowiedzi czasowych q [m]



Rys. 4. Porównanie odpowiedzi czasowych v [m/s]

5. Zadania

1. Zbudować model filtru Kalmana w środowisku *MATLAB/Simulink* zgodnie z *Sekcją 4* używając bloków *Constant* z biblioteki *Sources* oraz bloków *Add*, *Gain*, *Product* z biblioteki *Math Operations*. Jako elementów pamięci dla estymaty stanu \mathbf{x} i kowariancji błędu \mathbf{P} użyć bloków *Memory* lub *Delay* z biblioteki *Discrete* (czas dyskretny), lub *Transport Delay* z biblioteki *Continuous* (czas ciągły). Ponadto przyjmując: $v=4$, $r=10^{-9}$ oraz warunki początkowe estymaty stanu: $[0 \ 0 \ 0]^T$ i estymaty kowariancji błędu: \mathbf{Q} .
Ustawić parametry symulacji: *Type*->*Fixed step*; *Fixed step size* = $1e-3$ [s] (stały krok próbkowania $t_0 = 1$ ms); *Stop Time* = 16 [s] (czas symulacji).
2. Zbudować w środowisku *Simulink* model filtru dolnoprzepustowego inercyjnego I-rzędu o częstotliwości granicznej 500 [rad/s] przy spadku -3dB (stała czasowa 2 ms), oraz model filtru górnoprzepustowego różniczkującego rzeczywistego o częstotliwości granicznej 1.0 [rad/s] przy spadku -3dB (stała czasowa 1 s), wykorzystując blok *Discrete Transfer Fcn* z biblioteki *Discrete* lub blok *Transfer Fcn.* z biblioteki *Continuous* – patrz *Dodatek1*;
3. Używając dwóch bloków *From Workspace* z biblioteki *Sources*, podać na wejście układu zmierzone przemieszczenie q (zmienna *StructData*) oraz przyspieszenie a (zmienna *StructData1*) z MAT-plików dostępnych pod adresem: <https://dysk.agh.edu.pl/s/2mBDLwrPLHX5YCZ>
4. Wyznaczyć przebieg czasowy prędkości v wykorzystując sygnały przemieszczenia q i przyspieszenia a , a także bloki *Discrete Derivative* (lub *Derivative*) oraz *Discrete-Time Integrator* (lub *Integrator*) z czasem dyskretnym (lub ciągłym) bez żadnych filtrów oraz z filtrem dolnoprzepustowym (przed operacją różniczkowania) i górnoprzepustowym (po operacji całkowania) zbudowanymi w *pkt.2*. Uzgodnić znaki otrzymanych przebiegów prędkości v .
5. Wyznaczyć przebieg czasowy prędkości v wykorzystując filtr Kalmana zbudowany w *pkt.1* oraz sygnał przemieszczenia q . Porównać wszystkie otrzymane przebiegi czasowe v używając bloku *Scope* (z biblioteki *Sinks*) o pięciu wejściach i pięciu podokienkach w układzie pionowym (jedno nad drugim).
Do prezentacji i oceny wyników wykonać przybliżenie zakresu czasowego [13, 14] s.

Dodatek1: Przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym

Dwa z najczęstszych wyzwań związanych z przetwarzaniem sygnałów w czasie rzeczywistym to redukcja szumów wysokoczęstotliwościowych i eliminacja wolnozmiennego pełzania (dryftu) wartości średniej sygnału.

Szumy pomiarowe i procesowe są nieodłącznymi zjawiskami występującymi w rzeczywistych układach kontrolno-pomiarowych. Szumy te są związane z niedoskonałością systemów rzeczywistych oraz torów pomiarowych, a także z zakłóceniami zewnętrznymi (np. elektromagnetycznymi, akustycznymi, czy drganiami), kwantowaniem, itp. Aby usunąć szumy z sygnału pomiarowego, stosuje się filtry dolnoprzepustowe. W implementacji sterowania w czasie rzeczywistym, bliskie zeru przesunięcie fazowe sygnału pomiarowego względem wielkości rzeczywistej jest jednym z głównych elementów efektywności sterowania, dlatego często stosuje się proste filtry niskiego rzędu, np. *elementy inercyjne* (obwody RC) pierwszego lub drugiego rzędu o stałej czasowej dostosowanej do żądanej częstotliwości odcięcia (Rys. 1(a)).

Zjawisko pełzania wartości średniej sygnału występuje w przypadku stosowania przetworników piezoelektrycznych lub wykonywania całkowania sygnału. Efekt

piezoelektryczny pozwala uzyskać stały ładunek elektryczny na elemencie krystalicznym poddanym napięciom statycznym. Jednakże, ze względu na niezerową rezystancję, z czasem następuje jego rozładowanie, co powoduje dryft sygnału wyjściowego o niskiej częstotliwości. Z kolei całkowanie sygnału (np. w celu uzyskania sygnału prędkości na podstawie pomiaru przyspieszenia) jest obciążone stałą całkowania, która dodawana przy każdym kroku próbkowania powoduje pełzanie wartości średniej. Również w tym przypadku istotne jest bliskie zeru przesunięcie fazowe sygnałów wykorzystywanych w systemach sterowania w czasie rzeczywistym, dlatego niejednokrotnie stosuje się proste filtry niskiego rzędu, np. elementy *różniczkujące rzeczywiste* pierwszego rzędu (obwody RC) o stałej czasowej dostrojonej do żądanej częstotliwości odcięcia (Rys. 1(b)).

Oba powyższe wyzwania związane z przetwarzaniem sygnałów w czasie rzeczywistym mogą zostać rozwiązane przy wykorzystaniu filtru Kalmana (patrz *Sekcja 4*).

Literatura:

- [1] Digital Filters - Analog Devices: https://www.analog.com/media/en/training-seminars/design-handbooks/MixedSignal_Sect6.pdf
- [2] S.W. Smith "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", 1997-1998, www.DSPguide.com
- [3] T. Singhal, A. Harit, D.N. Vishwakarma "Kalman Filter Implementation on an Accelerometer sensor data for three state estimation of a dynamic system", IJRET, Vol. 1, No. 6, 2012.
- [4] M. Athans "Special Issue on the LQG Problem", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 16, No. 6, December 1971.
- [5] M. Rosół, P. Martynowicz "Implementation of the LQG controller for a wind turbine tower-nacelle model with an MR tuned vibration absorber", Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 54, No. 4, 2016.
- [6] Dokumentacja pakietu MATLAB/Simulink: <http://www.mathworks.com>.