

# FILTRY CZĄSTECZKOWE

Rafał Frączek<sup>1</sup>

## STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono problem rekursywnej estymacji zmiennych stanu. Zakłada się, że badany proces jest nieliniowy oraz, że może występować szum o rozkładzie odbiegającym od rozkładu Gaussa. Zaprezentowano trzy rozwiązania tego problemu: filtr Kalmana, filtr cząsteczkowy oraz filtr będący połączeniem filtra Kalmana i filtra cząsteczkowego. Wszystkie rozwiązania zaimplementowano w języku Octave i przetestowano. Przedstawione zostały wyniki symulacji działania poszczególnych filtrów.

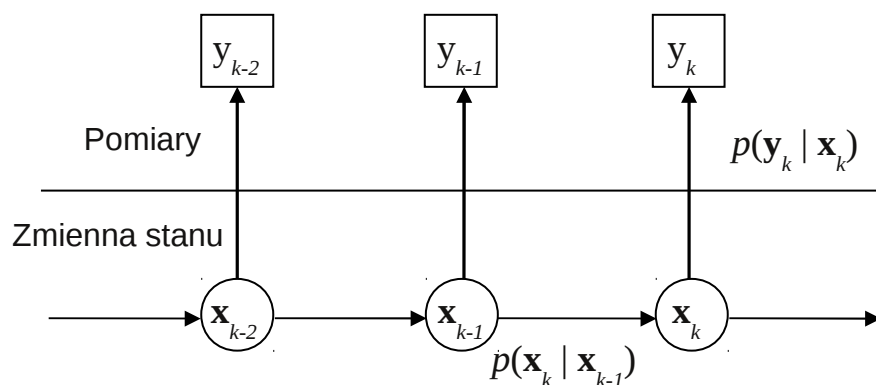
## PARTICLE FILTERS

### ABSTRACT

In this paper a recursive state estimation problem is presented. We shall concentrate on the state space approach to modeling dynamic systems but the focus will be on the non-linear and non-Gaussian systems. Three algorithms are presented: Kalman filter, Particle filter and a combination of a Kalman filter and a Particle filter called Extended Kalman filter. Special attention will be given to Particle filters.

### 1. Wstęp

W wielu zastosowaniach filtracja jest równoważna problemowi estymacji wektora zmiennych stanu  $\mathbf{x}_k$  na podstawie wektora pomiarów  $\mathbf{y}_k$  systemu w warunkach występowania zakłóceń np. szumu pomiaru (patrz rys.1). Aby rozwiązać ten problem należy zacząć od zbudowania modelu systemu. Często są to modele nieliniowe, zaś szum posiada rozkład odbiegający od rozkładu Gaussa.



Rys. 1. Proces pomiaru:  $\mathbf{x}_k$  - wektor zmiennych stanu w  $k$ -tej chwili czasu,  $\mathbf{y}_k$  - wektor pomiarów w  $k$ -tej chwili czasu.

Rozwiązaniem problemu filtracji jest wyznaczenie warunkowej gęstości prawdopodobieństwa aposteriori  $p(\mathbf{X}_{1:k} | \mathbf{Y}_{1:k})$  (ang. *posterior density*) przy czym  $\mathbf{X}_{1:k} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  oraz  $\mathbf{Y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ . Aby uwolnić się od konieczności zapamiętania pełnej historii zmiennych stanu, można posłużyć się rekursywnym obliczeniem przefiltrowanej warunkowej gęstości prawdopodobieństwa aposteriori (ang. *filtered density*)  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ .

<sup>1</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza - Kraków, Wydz. EAIIE, Zakład Metrologii

Gdy dana jest przefiltrowana gęstość, można już wyznaczyć estymaty zmiennych stanu:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}] = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \quad (1)$$

Jednym z algorytmów mogącym być wykorzystanym w przypadku nieliniowego systemu jest *rozszerzony filtr Kalmana* (ang. *Extended Kalman Filter – EKF*). Innym podejściem do problemu filtracji jest użycie tzw. sekwencyjnych metod Monte Carlo zwanych również *filtrami cząsteczkowymi* (ang. *Particle Filters – PF*). Filtry te pozwalają na śledzenie dowolnego obiektu nieliniowego w obecności szumu o dowolnym rozkładzie.

## 2. Model obiektu

Badane algorytmy estymacji zostaną zastosowane do ogólnego modelu w przestrzeni stanu składającego się z funkcji przejścia systemu  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  oraz równania pomiaru  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ . Model może być wyrażony w następujący sposób [1]:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}): \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (2)$$

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k): \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x}$  oznacza wektor zmiennych stanu modelu,  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^{n_y}$  oznacza wektor pomiarów,  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^{n_v}$  jest szumem procesu zaś  $\mathbf{n}_k \in \mathbf{R}^{n_n}$  jest szumem pomiaru. Odwzorowania  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_v} \rightarrow \mathbf{R}^{n_x}$  oraz  $\mathbf{h}: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_n} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$  reprezentują deterministyczne modele procesu i pomiaru, które w ogólności mogą być nieliniowe. Naszym celem jest estymacja gęstości prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{Y}_{1:k})$ , gdzie  $\mathbf{Y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ . Ponadto zakładamy, że  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}, \dots, \mathbf{x}_0) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  czyli że jest to proces Markowa pierwszego rzędu.

## 3. Filtr Kalmana

Rozszerzony Filtr Kalmana jest estymatorem opartym o rozwinięcie w szereg Taylora nieliniowych funkcji przejścia systemu  $\mathbf{f}$  oraz funkcji pomiaru  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} \right|_{\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1})^2 + \dots \quad (4)$$

Funkcja  $\mathbf{f}$  jest rozwinięta w punkcie  $\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , będącym prognozą  $\mathbf{x}_k$  obliczoną w oparciu o pomiary  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$ . Wykorzystując tylko liniowy składnik powyższego rozwinięcia otrzymujemy równania na wartość oczekiwaną  $\bar{\mathbf{x}}_{k|k}$  będącą estymatą  $\mathbf{x}_k$  wyznaczoną na podstawie pomiarów  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$  i kowariancję  $\mathbf{P}_{k|k}$  aproksymowanej gęstości prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{Y}_{1:k})$  [6]:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{0}) \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{k+k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{U}_k \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T]^{-1} \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k|k} = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{0})) \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (9)$$

gdzie,  $\mathbf{K}_k$  jest wzmocnieniem Kalmana,  $\mathbf{Q}$  jest wariancją szumu procesu (zakłada się, że posiada on wartość średnią równą zero),  $\mathbf{R}$  jest wariancją szumu pomiaru (również zakłada się zerową wartość średnią),

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{G}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_k} \right|_{\mathbf{v}_k = \bar{\mathbf{v}}} \quad \text{są Jakobianami modelu procesu, zaś}$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{U}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{n}_k)}{\partial \mathbf{n}_k} \right|_{\mathbf{n}_k = \bar{\mathbf{n}}} \quad \text{są Jakobianami modelu pomiaru.}$$

#### 4. Filtr cząsteczkowy

Idea działania filtra cząsteczkowego polega na przedstawieniu estymowanych zmiennych stanu za pomocą zbioru losowych próbek (cząsteczek) wraz z przypisanymi im wagami [1]. Filtr cząsteczkowy może być widziany jako metoda symulacyjna polegająca na symulacji dużej ilości możliwych trajektorii zmiennych stanu. Każda z tych trajektorii jest reprezentowana w danej chwili dyskretnego czasu  $k$  za pomocą jednej liczby (cząsteczki). Na podstawie kolejnych pomiarów każdej z trajektorii przyporządkowuje się wagę, która określa prawdopodobieństwo, z jakim dana trajektoria reprezentuje rzeczywistą trajektorię. Działanie filtra cząsteczkowego polega więc na produkowaniu możliwych realizacji wektora stanu w danej chwili czasu, a następnie przypisaniu tym realizacjom odpowiednich wag. Realizacje te wraz z przypisanymi im wagami tworzą aproksymację gęstości prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ , która stanowi poszukiwane rozwiązanie problemu filtracji.

Aby wyznaczyć aproksymację  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  filtry cząsteczkowe wykorzystują rekursywną estymację Bayesa [5]:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})} \quad (10)$$

W powyższym wzorze:

- $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  jest określone za pomocą równania pomiaru (3),
- $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1}$ ,  
(11)  
przy czym  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  jest określone za pomocą funkcji przejścia (2),
- $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k$ .  
(12)

Równania (10), (11) oraz (12) stanowią rekursywny algorytm pozwalający na iteracyjne wyznaczanie  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  wraz z upływem czasu oraz pojawianiem się kolejnych pomiarów.

Kolejnym krokiem jest przedstawienie aproksymacji  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  za pomocą zbioru próbek  $\{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N$ , wraz z przypisanymi im znormalizowanymi wagami  $\{\hat{\mathbf{w}}_k^i\}_{i=1}^N$ . Wtedy aproksymacja  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  wyraża się następującym równaniem:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{w}}_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (13)$$

gdzie  $\delta(\mathbf{x})$  oznacza deltę Diraca.

Dla  $k=0$  mamy:

$$\mathbf{x}_0^i \equiv p(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{w}_0^i = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Podstawiając (13) do (11) oraz (12) otrzymujemy:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) \approx p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{w}}_{k-1}^i p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (14)$$

Z powyższego wzoru wynika, że zbiór próbek stanowiący aproksymację  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  powstaje w wyniku losowania tych próbek z prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$  czyli:

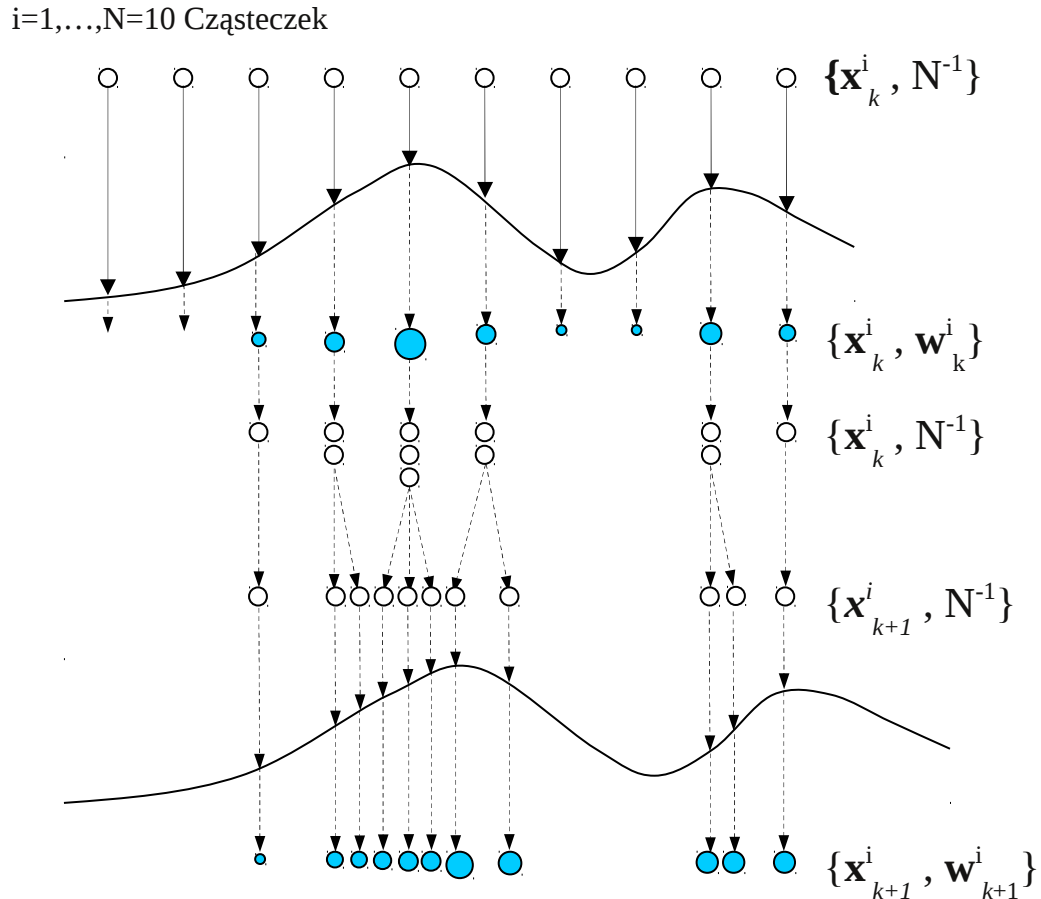
$$\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

gdzie „ $\sim$ ” oznacza proporcjonalność. Próbką  $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$  może być wygenerowana przez wylosowanie próbki szumu procesu  $\mathbf{v}_{k-1}^i$  i następnie skorzystaniu ze wzoru  $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{v}_{k-1}^i)$ . Odpowiadające próbkom wagi są obliczane w następujący sposób:

$$\mathbf{w}_k^i = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \hat{\mathbf{w}}_{k-1}^i, \quad \hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{j=1}^N \mathbf{w}_k^j}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Proporcjonalność (15) oraz równania (16) stanowią podstawę budowy filtra cząsteczkowego.

Częstym problemem występującym w filtrach cząsteczkowych jest tzw. zjawisko „degeneracji” (ang. *degeneracy problem*), polegające na tym, iż po kilku iteracjach większość próbek ma zaniedbywaną wagę. Zjawisko to powoduje, że znaczący wysiłek obliczeniowy jest poświęcony na cząsteczki, których wkład do aproksymacji  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  jest prawie równy zero. Aby rozwiązać ten problem stosuje się mechanizm przepróbkowania (ang. *resampling*) polegający na odwzorowaniu zbioru  $N$  cząsteczek z różnymi wagami w nowy zbiór  $N$  cząsteczek z jednakowymi wagami  $\{\mathbf{x}_k^i, \hat{w}_k^i\} \rightarrow \{\mathbf{x}_k^j, N^{-1}\}$ . Algorytm ten polega na zachowaniu i zwiększeniu liczby cząsteczek z dużymi wagami oraz usunięciu cząsteczek z zaniedbywanymi małymi wagami.



Rys. 2. Ewolucja cząsteczek w czasie.

Istota działania filtra cząsteczkowego jest przedstawiona na rysunku 2. Filtr rozpoczyna pracę w chwili  $k$ . W tym momencie zbiór cząsteczek  $\{\mathbf{x}_k^i, N^{-1}\}$  stanowi aproksymację  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1})$  oraz wszystkie cząsteczki posiadają jednakową wagę równą  $N^{-1}$ . Dla każdej cząsteczki obliczamy odpowiednią wagę wykorzystując dostępną informację w chwili  $k$ , otrzymując zbiór  $\{\mathbf{x}_k^i, w_k^i\}$ . Następnie operacja przepróbkowania powoduje wybranie najbardziej „dopasowanych” cząsteczek, w wyniku czego otrzymujemy nowy zbiór cząsteczek  $\{\mathbf{x}_k^i, N^{-1}\}$  z jednakowymi wagami, który stanowi aproksymację  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$ . W kolejnym kroku zwanym predykacją otrzymujemy zbiór cząsteczek w następnej chwili czasu  $\{\mathbf{x}_{k+1}^i, N^{-1}\}$ . Cykl tej jest powtarzany dla każdej chwili czasu, w wyniku czego otrzymujemy aproksymację  $p(\mathbf{X}_{1:k} | \mathbf{Y}_{1:k})$ .

Algorytm pracy filtra cząsteczkowego jest przedstawiony w tabeli 1.

Tabela 1. Algorytm filtra cząsteczkowego typu SIR (ang. Sampling Importance Resampling) [1].

$\left\{ \left\{ \mathbf{x}_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right\} = \text{SIR} \left\{ \left\{ \mathbf{x}_{k-1}^i, w_{k-1}^i \right\}_{i=1}^N, \mathbf{y}_k \right\}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• FOR <math>i = 1: N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Losuj <math>\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k   \mathbf{x}_{k-1}^i)</math></li> <li>- <math>w_k^i = p(\mathbf{y}_k   \mathbf{x}_k^i) \hat{w}_{k-1}^i</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> <li>• Oblicz sumę <math>t = \sum_{i=1}^N w_k^i</math></li> <li>• FOR <math>i = 1: N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Normalizacja: <math>\hat{w}_k^i = t^{-1} w_k^i</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> <li>• Przepróbkowanie: <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\left\{ \left\{ \mathbf{x}_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right\} = \text{RESAMPLE} \left\{ \left\{ \mathbf{x}_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right\}</math></li> </ul> </li> </ul>
---

Tabela 2. Pomocniczy algorytm przepróbkowania [1].

$\left\{ \left\{ \mathbf{x}_k^j, w_k^j \right\}_{j=1}^N \right\} = \text{RESAMPLE} \left\{ \left\{ \mathbf{x}_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right\}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>c_1 = 0</math></li> <li>• FOR <math>i = 2: N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>c_i = c_{i-1} + w_k^i</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> <li>• <math>i = 1</math></li> <li>• Losuj punkt początkowy <math>u_1 \sim U[0, N^{-1}]</math></li> <li>• FOR <math>j = 1: N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>u_j = u_1 + N^{-1}(j-1)</math></li> <li>- WHILE <math>u_j &gt; c_i</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>i = i + 1</math></li> </ul> </li> <li>- END WHILE</li> <li>- <math>x_k^j = x_k^i</math></li> <li>- <math>w_k^j = N^{-1}</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> </ul>
--

## 5. Ulepszony filtr cząsteczkowy

W przypadku filtra SIR cząsteczki są generowane z prawdopodobieństwa  $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ . Wadą tego rozwiązania jest to, iż prawdopodobieństwo  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$  nie uwzględnia najnowszych wyników pomiarów, co może prowadzić w niektórych przypadkach do pogorszenia jakości estymacji. Dlatego zaproponowano rozwiązanie polegające na uaktualnieniu zbioru cząsteczek za pomocą filtra Kalmana. Tak zmodyfikowany filtr cząsteczkowy nazywa się rozszerzony cząsteczkowy filtr Kalmana (ang. Extended Kalman Particle Filter - EKF-PF). Jego algorytm jest przedstawiony w tabeli 3.

Tabela 3. Rozszerzony cząsteczkowy filtr Kalmana

$\left[ \left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right] = \text{EKF-PF} \left[ \left\{ x_{k-1}^i, w_{k-1}^i \right\}_{i=1}^N, y_k \right]$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• FOR <math>i=1 : N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\left[ \hat{x}_k^i, P_k^i \right] = \text{EKF} \left[ x_k, y_k \right]</math></li> <li>- Losuj <math>x_k^i \sim p(x_k   x_{k-1}^i) = N(\hat{x}_k^i, P_k^i)</math></li> <li>- <math>w_k^i = p(y_k   x_k^i) \hat{w}_{k-1}^i</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> <li>• Oblicz sumę <math>t = \sum_{i=1}^N w_k^i</math></li> <li>• FOR <math>i=1 : N</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Normalizacja: <math>\hat{w}_k^i = t^{-1} w_k^i</math></li> </ul> </li> <li>• END FOR</li> <li>• Przepróbkowanie:           <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\left[ \left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right] = \text{RESAMPLE} \left[ \left\{ x_k^i, w_k^i \right\}_{i=1}^N \right]</math></li> </ul> </li> </ul>
---

## 6. Zastosowania

Filtry cząsteczkowe mogą znaleźć zastosowanie w różnych dziedzinach techniki i nauki. Najczęściej filtry cząsteczkowe będą stosowane do identyfikacji nieliniowych, niestacjonarnych obiektów dynamicznych w warunkach występowania szumu procesu i pomiaru o rozkładzie niegaussowskim. Innym z kolei zastosowaniem może być filtracja sygnałów pomiarowych dostarczanych przez czujniki pomiarowe o nieliniowej charakterystyce przetwarzania. Filtry cząsteczkowe stosuje się obecnie w systemach nawigacji samolotu [5], w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów jedno i dwuwymiarowych do śledzenia ruchu obiektu [7], oraz do śledzenia ruchu źródła dźwięku [7].

## 7. Symulacja

W przeprowadzonym eksperymencie, posłużono się następującym modelem obiektu:

$$f_{k+1}(x_k, v_k) = 1 + \sin(\omega kt) + 0.5x_k + v_k \quad (17)$$

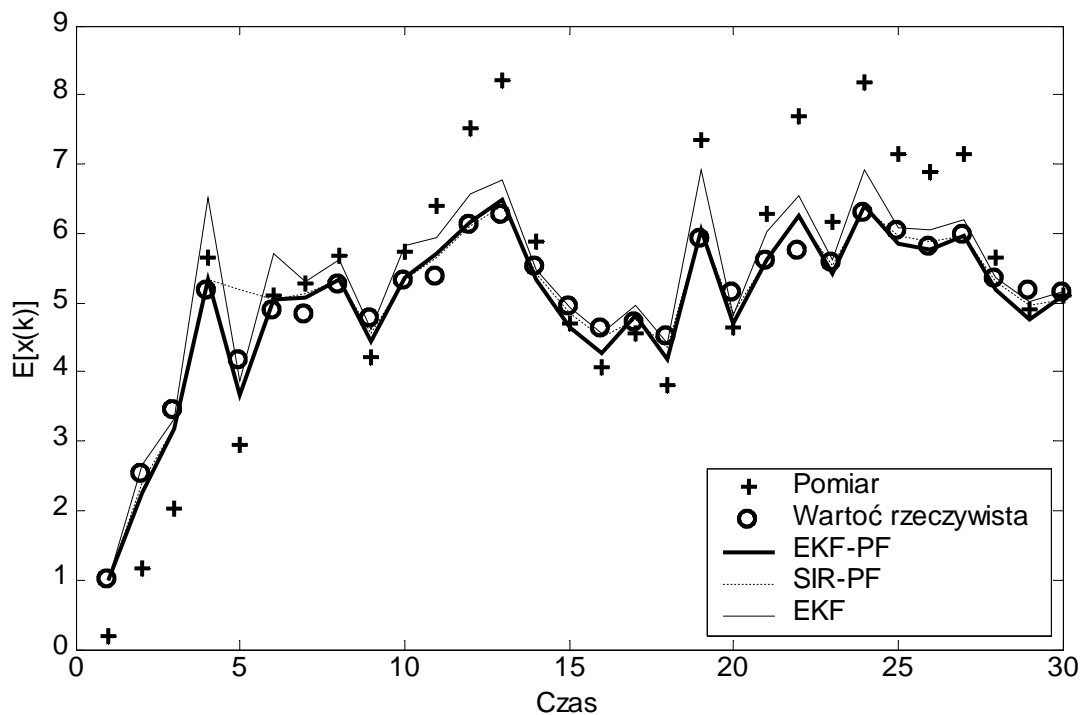
$$h_{k+1}(x_{k+1}, n_{k+1}) = 0.2x_{k+1}^2 + n_{k+1} \quad (18)$$

gdzie:  $\omega = 0.002$ ,  $v_k$  jest losową zmienną modelującą szum procesu, zaś  $n_k$  jest szumem Gaussa o wartości średniej  $m=0$ . Do estymacji zmiennej stanu użyto: rozszerzony filtr Kalmana (EKF), filtr cząsteczkowy (SIR) oraz rozszerzony cząsteczkowy filtr Kalmana (EKF-PF). Filtry cząsteczkowe używały 500 cząsteczek. Symulacja została powtórzona 200 razy, za każdym razem zostały wyznaczone średnia oraz wariancja błędu estymaty zmiennej stanu. Uśrednione wyniki dla wszystkich symulacji zostały przedstawione w tabeli 4.

Na rysunku 3 przedstawiono wynik pracy rozszerzonego filtra Kalmana, filtra cząsteczkowego oraz rozszerzonego cząsteczkowego filtra Kalmana. Program implementujący filtr Kalmana został napisany w języku C++. Za pomocą „+” został przedstawiony zaszumiony wynik pomiaru zmiennej stanu, natomiast „o” przedstawia rzeczywistą wartość zmiennej stanu. Wynik pracy poszczególnych filtrów został przedstawiony za pomocą linii ciągłych. Jak widać najlepsze wyniki uzyskano dla rozszerzonego cząsteczkowego filtra Kalmana.

Tabela 4. Wyniki symulacji

Rodzaj filtra		Wartość średnia błędu	Wartość średnia wariancji błędu
rozszerzony filtr Kalmana	EKF	0.279	0.338
filtr cząsteczkowy	SIR-PF	0.138	0.420
rozszerzony cząsteczkowy filtr Kalmana	EKF-PF	0.055	0.112



Rys 3. Porównanie estymaty zmiennej stanu otrzymanej za pomocą różnych filtrów.

## 8. Podsumowanie

W pracy przedstawiono algorytm filtra cząsteczkowego. Filtry cząsteczkowe mogą z powodzeniem być stosowane do estymacji zmiennych stanu nieliniowych i niestacjonarnych obiektów. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że w takim przypadku filtry cząsteczkowe dają lepsze rezultaty niż filtr Kalmana. Z pośród badanych filtrów najlepiej wypadł rozszerzony cząsteczkowy filtr Kalmana, który dzięki zastosowanym ulepszeniom charakteryzuje się najmniejszym błędem estymacji.

Dalsze prace będą zmierzały do praktycznego zastosowania filtrów cząsteczkowych w konkretnych zadaniach pomiarowych.

## LITERATURA

- [1] Arulampalam Sanjeev, Maskell Simon, Gordon Neil, Clapp Tim: *A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*; IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50 no 2, feb. 2002, pp 174—188.
- [2] Godsill Simon, Andrieu Christophe, Arnaud Doucet: *On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering*; Technical Report CUED/F-INFENG/TR310, Dept. of Engineering, University of Cambridge, 1998.
- [3] Liu Jun, Chen Rong: *Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems*; Journal of the American Statistical Association vol. 93 no. 443, year 1998, pp. 1032—1044.
- [4] Isard, M., Blake A, Reynard, D: *Learning to track the visual motion of contours*. Artificial Intelligence, 78, pp. 101-134.
- [5] Nordlound J: *Sequential Montecarlo Filters and Inegrated Navigation*; Department of Electrical Engineering, Linkoping University, SE-58183 Linkoping, Sweden, Nov 2001.
- [6] Merwe R, Doucent A, Freitas N, Wan E: *The Unscented Particle Filter*; Technical Report CUED/F-INFENG/TR 380, Cambridge University Engineering Department, August 2000.
- [7] Perez P, Hue C, Cadre J.P.: *Tracking multiple objects with particle filtering*; Technical report, Research report IRISA, No1361, Oct 2000.
- [8] Storvik Geir: *Particle filters in state space models with the presence of unknown static parameters*; IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, no. 2, pp. 281--289, 2002.
- [9] Tanizaki Hisashi: *Non-linear and Non-Gaussian State Space Modeling with Monte Carlo Techniques*; Journal of Econometrics vol. 83, pp. 263-290, 1998.