Spis treści

Analiza matematyczna na kierunku ”Elektrotechnika”

30 listopada 2015

1 Uzupełnienia do pierwszych wykładów (2014)

Literatura:

W. Żakowski, W. Kołodziej “Matematyka Cz.I” WNT
R. Leitner, “Zarys matematyki wyższej dla studentów , Cz. I” WNT
J. Pietraszko, “Matematyka: teoria, przykłady, zadania” Oficyna Wyd. Politechn. Wrocłaskiej
R.Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, “Zadania z matematyki wyższej cz. I”
M. Gewert, Z. Skoczylas, “Analiza matematyczna 1 Przykłady i zadania” Oficzyna Wyd. GiS, Wrocław
F. Leja, “Rachunek różniczkowy i całkowy” PWN
J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT
W.Krysicki, L. Włodarski, “Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I”, PWN

Kurs analizy dla studentów informatyki UW opracowany (szczególnie starannie) przez pracowników UJ pod adresem:

`http://osilek.mimuw.edu.pl/index.php?title=Analiza_matematyczna_1`

Portal matematyka.pl itd.

Najważniejsze źródło: **porządne notatki z wykładu**.

1.1 Podstawowe oznaczenia

Zbiory liczb: $\mathbb{N}$ (naturalnych, bez zera), $\mathbb{Z}$ (całkowitych), $\mathbb{Z}_+$ (całkowitych nieujemnych), $\mathbb{Q}$ (wymiernych), $\mathbb{R}$ (rzeczywistych), $\mathbb{C}$ (zespolonych)

Symbole logiki matematycznej: Zdania logiczne oznaczane literami (typu p, q, r, a, b) -to wyrażenia, którym przypisać można jedną z wartości logicznych: *prawda* (=wartość 1, oznaczana tu przez literę ν -np. $\nu(p) = 1$) lub *fałsz* (wartość 0). Zdania łączymy spójnikami logicznymi, tworząc nowe zdania o następującej wartości:

- negacja: $\neg p$, lub $\sim p$ [wartość przeciwna: $\nu(\neg p) = 1 - \nu(p)$]
- alternatywa: $p \vee q$, gdzie $\nu(p \vee q) = \max(\nu(p), \nu(q))$
- koniunkcja: $p \wedge q$, gdzie $\nu(p \wedge q) = \min(\nu(p), \nu(q)) = \nu(p) \cdot \nu(q)$
- implikacja: $p \Rightarrow q$, gdzie $\nu(p \Rightarrow q) = \max(1 - \nu(p), \nu(q))$
- równoważność $p \Leftrightarrow q$, [$\nu(p \Leftrightarrow q) = 1$ dokładnie wtedy, gdy $\nu(p) = \nu(q)$].

Tautologia, to zdanie złożone prawdziwe przy dowolnych wartościach logicznych występujących w nim ”symboli zdań” -np. $\nu(p \vee (\sim p)) = 1$ zarówno przy $\nu(p) = 0$, jak i wtedy, gdy $\nu(p) = 1$.Więc $p \vee (\sim p)$ jest tautologią (zwaną *prawem wyłączonego środka*). Gdy wysępują 2 symbole: p,q, sprawdzić musimy 4 możliwe układy wartości logicznych: pary $(\nu(p), \nu(q))$ mogą być równe jednej z par: (1,1), (1,0), (0,1), (0,0). Dla 3 symboli będzie $2^3 = 8$ możliwych ewaluacji trójek p, q, r do sprawdzenia (używamy tabelek). Ważne przykłady tautologii znadziecie Państwo w większości zbiorów zadań. Przykładowo, zachodzi następująca "rozdzielność alternatywy względem koniunkcji":

$$[(p_1 \vee p_2) \wedge q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q)].$$

Mamy też "rozdzielność koniunkcji wzgl. alternatywy":

$$[(p_1 \wedge p_2) \vee q] \Leftrightarrow [(p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q)].$$

Wyrażenia zawierające zmienne (litery typu $n, m, x, y, ...$), które po wstawieniu za nie konkretnych obiektów danej torii (np. liczb, punktów, zbiorów) stają się zdaniami -nazwiemy *funkcjami zdaniowymi*, bądź *formami zdaniowymi*. Formy zdaniowe mogą być poprzedzone kwantyfikatorami odnoszącymi się do danej zmiennej z formy -opisanej jako symbol pod kwantyfikatorem. Zmienna z formy zdaniowej zostaje "związana" przez dany kwantyfikator i jeśli jest to jedyna zmienna- otrzymujemy zdanie. Są 2 *kwantyfikatory: ogólny* ("dla każdego") -oznaczany $\forall$ oraz *szczegółowy* ("istnieje"), ozn. $\exists$. Tak więc zdanie $\forall_x\ x^2 + 1 > 0$, jeśli dotyczy liczb rzeczywistych, jest prawdziwe. Ale kto poznał liczby zespolone wie, że dla nich już istnieją takie x, dla których $x^2 = -4$ -zdanie przestaje być prawdziwe. Kwantyfikator $\forall$ traktowany jest jako "domyślny" i w zapisie często jest opuszczany. Podobnie, zamaiast symbolu koniunkcji, zazwyczaj w zapisie wstawia się przecinek, alternatywę opisuje się słowem "lub". Kwantyfikator $\exists_x$ zastępujemy słowami typu: "dla pewnego x".

Wygodnie jest zdefiniować "kwantyfikatory z ograniczonym zakresem"

np. $\forall_{x\in\mathbb{N}}\ x > \frac{1}{2}$, lub $\exists_{x<0}\ 4^x = \frac{1}{2}$. Definiować je można przez równoważności:

$$\forall_{A(x)}\, B(x) \Leftrightarrow \forall_x[A(x) \Rightarrow B(x)],$$

$$\exists_{A(x)}\, B(x) \Leftrightarrow \exists_x[A(x) \wedge B(x)].$$

Zadanie 1. Sprawdzić, że tautologiami są następujące zdania:

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ ("zasada podwójnej negacji")

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

$[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ ("prawo de Morgana")

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ("zasada kontrapozycji")

$[(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)]$

$[(p_1 \wedge_2) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow q) \vee (p_2 \Rightarrow q)]$

$[p \Rightarrow (q_1 \vee q_2)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q_1) \vee (p \Rightarrow q_2)]$

Wyrażenie z kwantyfikatorem $\forall_{A(x)}\, B(x)$ jest prawdziwe, gdy dowolny x spełniający warunek $A(x)$ spełnia też warunek $B(x)$ -np. $\forall_{t>1}\, t^2 > t$ (dla każdej liczby rzeczywistej t takiej, że $t > 1$ mamy $t^2 > t$. Wyrażenie z kwantyfikatorem $\exists_x$ będzie prawdziwe, gdy znajdzie się przynajmniej jeden x spełniający warunek poprzedzony tym kwantyfikatorem. Mamy następujące *prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:*

$$\sim [\forall_x\, P(x)] \Leftrightarrow \exists_x\, [\sim P(x)], \qquad \sim [\exists_x\, Q(x)] \Leftrightarrow \forall_x\, [\sim Q(x)].$$

Dla konstrukcji kresów górnych istotna będzie następująca reguła:

$$[(\exists_x P(x)) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\forall_x(P(x) \Rightarrow Q)]. \tag{1}$$

Zadanie 2. Przy użyciu poznanych wcześniej reguł sprawdzić, czemu jest równoważna negacja kwantyfikatora $\exists_{A(x)} B(x)$.

Dla form zdaniowych, w których zmienną jest liczba naturalna n obowiązuje *zasada indukcji matematycznej*:

$$\big(P(1) \wedge [P(n) \Rightarrow P(n+1)]\big) \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\, P(n).$$

Zadanie 3. Stosując tę zasadę wykazać następujące tezy:
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
$\forall_{x>-1}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ("nierówność Bernoulli'ego"),
$[a_j > 0 (\forall_{j=1,\ldots,n}) \wedge a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1] \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$,
$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$,
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $13^n - 1$ jest podzielna przez 6,
Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

1.2 Zbiory

W teorii mnogości przyjmuje się, że pojęcia: zbioru, należenia elementu do zbioru (typu $a \in A$) -są to pojęcia pierwotne. Negację warunku $a \in A$ zapisujemy symbolem $a \notin A$. Wyróżniamy zbiór pusty, oznaczany symbolem $\emptyset$, do którego żaden element nie należy, zbiór jednoelementowy, którego jedynym elementem jest a oznaczamy symbolem $\{a\}$. Zbiór, do którego należą jedynie elementy $a_1, \ldots, a_n$ zapisujemy jako $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Jeden z aksjomatów mówi, że dwa dane zbiory (powiedzmy A i B) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy, czyli gdy zachodzi równoważność $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. W szczególności, dla zbiorów dwuelementowych jest $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ponadto $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Mówimy, że *zbiór B jest podzbiorem zbioru A*, co zapisujemy symbolem $B \subset A$, lub czasem $A \supset B$, jeśli zachodzi implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$, czyli gdy $\forall_{x\in B}\ x \in A$.

Jeśli E jest zbiorem, zaś $P(x)$ jest formą zdaniową określoną dla dowolnych elementów x ze zbioru E, to zbiorem jest też ogół tych x będących elementami zbioru E, dla których zdanie P(x) jest prawdziwe. Taki zbiór "wyróżniony przez formę $P(\cdot)$ zapisujemy w postaci $\{x \in E\ : P(x)\}$. Na przykład, przedział domknięty $[1, 5]$ na osi liczbowej $\mathbb{R}$, to zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 5 \wedge x \geqslant 1\}$.

Nie istnieje zbiór Ω wszystkich zbiorów, wówczas zbiorem powinien być $M = \{E \in \Omega : E \notin E\}$ dla którego, wbrew zasadzie wyłączonego środka, każda z (jedynych) dwu możliwości: $M \in M$ oraz $M \notin M$ prowadzi do sprzeczności! (Paradoks ten odkryty został przez B. Russela na początku XX wieku.)

Ta trudność powoduje potrzebę zakładania w formie aksjomatów istnienia pewnych zbiorów wynikłych z operacji (np. sumy mnogościowej) na pewnych zbiorach (lub na rodzinach zbiorów, tzn. na zbiorach, których elementami są pewne inne zbiory). Przykładem jest operacja tworzenia zbioru potęgowego (ozn. 2^E, lub $\mathcal{P}(E)$), którego (jedynymi) elementami są wszystkie możliwe podzbiory zbioru E.

Możemy zdefiniować przecięcie (część wspólną) zbiorów A i B jako zbiór $A \cap B = \{x \in A\ :\ x \in B\}$. Gdy A_n są zbiorami dla $n \in \mathbb{N}$, to uogólnionym iloczynem tych zbiorów nazywamy zbiór $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, ozn. też $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zdefiniowany jako $\{x \in A_1 : \forall_{n\in\mathbb{N}}\, x \in A_n\}$. W tej definicji wyróżniliśmy go jako pewien podzbiór w zbiorze A_1, ale mogliśmy równie dobrze użyć innego ze zbiorów A_n. Gorzej jest z definicją sumy mnogościowej -nie mamy na ogół zbioru, w którym to się zawiera i trzeba zagwarantować aksjomatem istnienie zbioru (np. $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ takiego, że $x \in E \Leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, x \in E_k)$). Gdy wszystkie zbiory E_n zawarte są w pewnym zbiorze (np, w zbiorze $\mathbb{R}$), nie musimy używać aksjomatu -bo wówczas nasz E jest zbiorem $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n\in\mathbb{N}}\ x \in A_n\}$.

Przykład Wyznaczmy sumę ciągu przedziałów domkniętych $D_n = [\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$. Niech $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Jeśli $x \in B$, to dla pewnego "wskaźnika" $m \in \mathbb{N}$ jest $x \in D_m$, czyli $\frac{1}{m} \leqslant x \leqslant 2 - \frac{1}{m}$. Stąd $0 < x < 2$ i w takim razie $B \subset (0, 2)$. Wykażemy, że faktycznie zbiór B jest równy przedziałowi otwartemu $(0, 2)$. Wystarczy sprawdzić zawieranie się tego przedziału w B, czyli wykazać, że dla każdej (dowolnie ustalonej) liczby $y \in (0, 2)$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $y \in D_k$. Ponieważ w szczególności mamy $y > 0$, liczba odwrotna: $\frac{1}{y}$ jest skończona i istnieją liczby naturalne k_1 spełniające warunek $\frac{1}{y} < k_1$. Wynika stąd, że $\frac{1}{k_1} < y$. Podobnie, istnieją liczby k_2 większe od odwrotności liczby (dodatniej) $2 - y$ i dla nich $\frac{1}{k_2} < 2 - y$, zaś $2 - \frac{1}{k_2} > 2 - (2 - y) = y$.

Jeśli równocześnie mamy $k \geqslant k_1$ oraz $k \geqslant k_2$ -a takie $k \in \mathbb{N}$ istnieją, np. $k = \max\{k_1, k_2\}$, to w szczególności $y \in [\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k}] = D_k$. Skoro znaleźliśmy takie $k \in \mathbb{N}$, że $y \in D_k$, to w myśl definicji sumy, mamy $y \in \bigcup_n D_k$, co było do okazania.

Najbardziej ogólna definicja sumy mnogościowej dotyczy sumy dla rodziny zbiorów, czyli takiego zbioru $\mathcal{A}$, którego wszystkie elementy są zbiorami. Mówimy mianowicie, że zbiór (nazwijmy go literą B) jest *sumą rodziny* $\mathcal{A}$, co oznaczamy symbolem $B = \bigcup \mathcal{A}$, jeżeli spełniony jest warunek:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists_{E \in A} x \in E.$$

Na przykład, dowolny zbiór A jest sumą wszystkich jego podzbiorów jednoelementowych: $A = \bigcup\{\{x\} : x \in A\}$. Zauważmy, że z reguły (1) dla kwantyfikatorów wynika następujące kryterium zawierania sumy mnogościowej dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ przez zadany zbiór E:

$$(\bigcup \mathcal{A} \subset E) \Leftrightarrow (\forall_{X \in \mathcal{A}} X \subset E, \tag{2}$$

czyli $\bigcup \mathcal{A}$ jest najmniejszym spośród zbiorów E zawierających wszystkie elementy tej rodziny zbiorów. Definiujemy też *różnicę mnogościową:* $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}$ dla pary zbiorów. Definiujemy *parę uparządkowaną* $(a; b)$ -gdzie element a nazywamy poprzednikiem, zaś b -następnikiem tej pary, wzorem

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

W większości podręczników oznacza się taką parę symbolem (a, b), ja zamiast przecinka wstawiam średnik, by odróżnić ten obiekt od przedziału otwartego o końcach a oraz b. W odróżnieniu od par nieuporządkowanych, czyli zbiorów $\{a, b\}$ -tu porządek odgrywa rolę i $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$. Iloczyn kartezjański zbiorów A oraz B, oznaczany $A \times B$, to zbiór wszystkich możliwych par $(a; b)$, gdzie $a \in A, b \in B$.

1.3 relacje, odwzorowania, funkcje

Relacją (binarną, czyli dwuargumentową) między elementami zbiorów A, B nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Mówimy, że relacja R jest *zwrotna*, gdy $A = B$ oraz $\forall_{a \in A}(a; a) \in R\}$. R jest *przechodnia*, gdy

$$[(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R] \Rightarrow (a; c) \in R.$$

Zamiast $(a; b) \in R$ piszemy na ogół aRb. Relację nazwiemy *symetryczną*, gdy $aRb \Rightarrow bRa$. Reklacja jest *antysymetryczna*, gdy $[aRb \wedge bRa] \Rightarrow a = b$.

Relacje równoważności, to relacje, które równocześnie są zwrotne, symetryczne i przechodnie. Natomiast relacje zwrotne, przechodnie i antysymetryczne nazywamy *relacjami (częściowego) porządku.*

Odwzorowaniem (a w przypadku $Y \subset \mathbb{R}$ *funkcją*) o dziedzinie D, gdzie $D \subset X$ i o wartościach w zbiorze Y nazywamy taką relację $f \subset X \times Y$, dla której $(x; y_1) \in R \wedge (x; y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2$ (relacja jednoznaczna), przy czym $D = \{x \in X : \exists y \in Y : (x; y) \in f\}$. Zamiast $(x; y) \in f$ piszemy wówczas $y = f(x)$ oraz $f : D \longrightarrow Y$. Definiujemy *obraz zbioru* $E \subset X$ *przez tę funkcję* jako zbiór $f[E] = \{y \in Y : \exists x \in E : y = f(x)\}$. Zbiór ten można też zapisać (nieco mniej formalnie) jako $\{f(x) : x \in E\}$. *Przeciwobraz zbioru* $B \subset Y$ oznaczany jako $f^{-1}[B]$ definiujemy jako $\{x \in D : f(x) \in B\}$.

Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazwiemy *odwzorowaniem różnowartościowym* lub *injekcją*, gdy zachodzi implikacja: $[a \in X \wedge b \in X \wedge f(b) = f(a)] \Rightarrow b = a$. Odwzorowaniem *na zbiór* Y lub *surjekcją* nazwiemy f, jeśli $f[X] = Y$, czyli gdy $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\ f(x) = y$. *Bijekcja.* to injekcja, która jest zarazem surjekcją.

Złożeniem odwzorowań $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ nazwiemy odwzorowanie $h : X \to Z$ oznaczane symbolem $g \circ f$, którego wartości określa wzór: $h(x) = g(f(x))$. Jak łatwo się domyśleć, g nazywamy funkcją zewnętrzną (odwzorowaniem zewnętrznym) tego złożenia, zaś f - odwzorowaniem wewnętrznym. Gdy f nie jest określona na całym zbiorze X, tylko na dziedzinie $D(f)$, zaś g -na dziedzinie $D(G)$, to powyższy wzór na złożenie określa odwzorowanie o dziedzinie równej $D(f) \cap f^{-1}[D(g)]$. (Ostatni zbiór jest równy zbiorowi $f^{-1}[D(g)]$.)

Zadanie 4. Sprawdzić, że dla obrazów mamy relacje:

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \qquad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],$$

przy czym ostatnia inkluzja jest równością dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ jedynie w przypadku injekcji. Dla przeciwobrazów mamy już równości $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ i analogiczną -gdy zamienić po obu stronach znak $\cap$ na symbol sumy: $\cup$. Ponadto $f[f^{-1}[A]] \subset A$ oraz $B \subset f^{-1}[f[B]]$. Która z ostatnich inkluzji staje się równością w przypadku injekcji, a która dla surjekcji?

Sposobem na ominięcie problemów związanych z nieinjektywnością jest przejście od odwzorowania $f : X \to Y$ do jego *zawężenia (restrykcji)* $f|_E$ do danego podzbioru E zbioru X (czyli takiego zbioru, że $E \subset X$). Jest to odwzorowanie określone takim samym wzorem, lecz z dziedziną "okrojoną do E". Innymi słowy, definiujemy $f|_E : E \to Y$ wzorem $f|_E(x) = f(x)$ dla $x \in E$. Na przykład, restrykcja funkcji *sinus* do przedziału $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest injekcją i żaden większy przedział nie ma już takiej własności.

Gdy $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem różnowartościowym, na zbiorze $f[X]$ możemy określić odwzorowanie odwrotne f^{-1}. Jest to jedyne odwzorowanie g o dziedzinie równej $f[X]$ i takie, że

$$\forall_{x \in X}\ g(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y \in f[X]}\ f(g(y)) = y.$$

Na przykład, dla funkcji $f = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ jej funkcję odwrotną oznaczamy symbolem $\arcsin$. Jest to funkcja określona na przedziale $[-1, 1]$ o wartościach w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dla funkcji $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $h(t) = t^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ injektywność mamy jedynie w przypadku k nieparzystych, zaś dla k parzystych maksymalnym podzbiorem dziedziny, na którym restrykcja $h|_E$ jest injektywna będzie $E = [0, +\infty) = \mathbb{R}_+$, zaś funkcją odwrotną do tej restrykcji jest funkcja "pierwiastek stopnia k", czyli $(h|_{[0,+\infty)})^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$ dla $y \in [0, +\infty)$. Przykładem funkcji, która jest równa funkcji do niej odwrotnej jest funkcja określona wzorem $\phi(t) = \frac{1}{t}$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zadanie 5. Wyznaczyć funkcje odwrotne dla funkcji: L określonej wzorem $L(t) = at + b$ oraz dla funkcji $u(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, jeśli $a, c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$.

Odwzorowanie o dziedzinie D_f, przyjmujące wartości $f(x)$ w zbiorze Y wygodnie jest zapisywać w postaci:

$$D_f \subset X \ni x \to f(x) \in Y \qquad \text{lub} \qquad D_f \ni x \to f(x) \in Y. \tag{3}$$

W takim zapisie najczęściej w miejscu $f(x)$ znajduje się jakiś wzór. Podanie samego wzoru (najczęściej liczbowego) jeszcze nie określa funkcji, bo nie jest podana dziedzina. Domyślnie możemy wówczas jednak przyjmować, że dziedzina jest maksymalna w przypadku $D \subset \mathbb{R}$. Na przykład, dziedziną maksymalną (mówimy też „dziedziną naturalną") dla $g(x) = \sqrt{\sin x}$ jest suma mnogościowa $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$, gdyż jedynie w punktach tego zbioru funkcja *sinus* jest nieujemna, zaś dziedziną naturalną funkcji $\sqrt{x}$ jest $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

1.4 Funkcje odwrotne

Jeśli $R \subset X \times Y$ jest relacją, to zbiór R^{-1} zdefiniowany jako

$$\{(y; x) : \ (x; y) \in R\}$$

jest zawarty w $Y \times X$, jest to więc relacja. Nazywamy R^{-1} *relacją odwrotną do relacji* R. Relacja odwrotna do odwzorowania –czyli do relacji jednoznacznej – na ogół nie jest jednoznaczna. Widać to na przykładzie funkcji potęgowej o wykładniku parzystym -w najprostszym przypadku -kwadratowej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. W tym przypadku $f^{-1} = \{(t; \sqrt{t}) : t \geqslant 0\} \cup \{(t; -\sqrt{t}) : t \geqslant 0\}$.

Próba usunięcia tej trudności prowadzi w naturalny sposób do pojęcia *restrykcji (zawężenia)* odwzorowania do zbioru $E \subset D$, oznaczanej symbolem $f|_E$. Dziedziną tej restrykcji jest zbiór E, jej wartości w punktach tego zbioru są takie, jak wartości odwzorowania f Tak więc dla odwzorowania postaci (3) definiujemy $f|_E : E \to Y$ określając $f|_E(x) = f(x)$ dla $x \in E$.

Relacja odwrotna do funkcji $f|_E$ będzie funkcją (relacją jednoznaczną) wtedy i tylko wtedy, gdy f będzie różnowartościowa na zbiorze E, czyli gdy $f|_E$ będzie injekcją. Funkcje: $\sqrt[k]{(x)}$ (gdy $k = 2n$ jest parzyste), $\arcsin$ i inne funkcje cyklometryczne definiujemy jako odwrotne do restrykcji funkcji potęgowej (odp. do restrykcji funkcji trygonometrycznych).

Dziedziną funkcji odwrotnej typu $(f|_E)^{-1}$ jest obraz: $f[E]$ zbioru E, czyli zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez f na zbiorze E. Ścisły dowód tego, że dziedziną funkcji pierwiastkowej $\sqrt[2n]{(x)}$ jest cała półoś nieujemna $\mathbb{R}_+$, dziedziną funkcji $\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$ jest przedział $[-1, 1]$ itp. jest dość trudne i dowodu nie podamy na wykładzie, znajdzie się on w notatkach uzupełniających (zostanie umieszczony później, w dalszej części tego pliku) i nie będzie Państwa obowiązywał. Ponieważ, jak wspominałem, jedną z podstawowych zasad w matematyce jest sprawdzanie, czy rzeczywiście dany obiekt istnieje, zachęcam do prześledzenia tych notatek.

1.5 Oś liczbowa

Zanim przystąpimy do opisu funkcji zmiennej rzeczywistej, podamy podstawowe własności zbioru liczb rzeczywistych.

Za znane przyjmujemy własności zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych odnoszące się do działań dodawania, mnożenia oraz brania liczby odwrotnej zapisywanej jako t^{-1} lub $\frac{1}{t}$, dla $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. (Przypomnijmy na przykład, że dla ułamków $t = \frac{k}{n}, s = \frac{l}{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$ mamy $t + s = \frac{km+ln}{mn}$, zaś $t = s \Leftrightarrow km = ln$, $t < s \Leftrightarrow km < ln$.) Gdy $t \neq s$, to zachodzi dokładnie jedna z dwu możliwości (tzw. *dychotomia*): albo jest $t < s$, albo też $s < t$.

Liczbie wymiernej t można przyporządkować zbiór $t^* = (-\infty, t) \cap \mathbb{Q}$. Odwzorowanie to będzie różnowartościowe (=łatwe ćwiczenie), przy czym $s \leqslant t \Leftrightarrow s^* \subset t^*$.

W pewnym sensie w zbiorze t^* można "zakodować" wszystkie informacje o liczbie wymiernej t. Tą drogą poszedł matematyk niemiecki, Richard Dedekind (1831-1916). Zdefiniował on zbiór liczb rzeczywistych jako zbiór tzw. przekrojów zbioru $\mathbb{Q}$. Definicja ta odzwierciedla własności wyżej określonych zbiorów t^* (będą one nazywane *przekrojami wymiernymi*).

Definicja 1 *Zbiór $A \subset \mathbb{Q}$ nazywamy przekrojem, gdy:*

1. $\emptyset \neq A \wedge A \neq \mathbb{Q}$,
2. *A nie zawiera elementu największego,*
3. $\forall_{s \in \mathbb{Q}}\ (t \in A \wedge s \leqslant t) \Rightarrow s \in A$.

(Niektórzy jako przekrój definiują parę zbiorów $A, B \subset \mathbb{Q}$, gdzie $B = \mathbb{Q} \setminus A$. Jest to tzw. „klasa górna"). Zamiast warunku 3. zakłada się, że

$$(\alpha \in A \wedge \beta \in B) \Rightarrow \alpha < \beta \quad \text{oraz} \quad A \cup B = \mathbb{Q}.$$

Przekrój nazywa się *wymiernym*, gdy klasa górna zawiera element najmniejszy (powiedzmy, t -wówczas wykazuje się, że musi być już $A = t^*$).

Pozostałe przekroje wyznaczają liczby *niewymierne*. Można wyobrazić sobie, jak słabo widoczny z daleka jest ludzki włos. Jednak przedziałek na uczesanej głowie już widać wyraźnie. Przekroje Dedekinda są właśnie takimi „przedziałkami" na zbiorze liczb wymiernych. Dla przykładu, przekrojem wyznaczającym liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ jest $\{t \in \mathbb{Q} : t \leqslant 0 \vee t^2 < 2\}$ Klasą górną jest tu $\{t \in \mathbb{Q} : t > 0 \wedge t^2 > 2\}$.

Można to ująć jeszcze inaczej: aby wyznaczyć dokładnie liczbę rzeczywistą x wystarczy określić, które liczby wymierne są od niej mniejsze (zbiór takich liczb $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha < x$, to będzie klasa dolna), a które liczby $\beta \in \mathbb{Q}$ są większe (dla niewymiernych x te ostatnie tworzą całą klasę górną odpowiadającą liczbie x). Liczby rzeczywiste niewymierne zapisane w układzie dziesiętnym (dokładniej omówimy to później) wymagają użycia nieskończenie wielu cyfr znaczących (różnych od zera) po przecinku. Zapisując liczbę w układzie dziesiętnym musimy jednak pominąć cyfry po przecinku od pewnego miejsca, zależy to od wymaganego poziomu dokładności. Wówczas podamy pewne przybliżenie takiej liczby z niedomiarem, tym lepsze, ile cyfr po przecinku uwzględnimy. Czasami, jak w przypadku słynnej liczby π wyrażającej stosunek obwodu okręgu do jego średnicy, duża dokładność wiąże się z chęcią ustanowienia rekordów sprawności obliczeniowej i cierpliwości. Ponieważ liczbę można z dowolnie dużą dokładnością przybliżać przez takie liczby α, które mają jedynie skończenie wiele cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym (tzn. $\exists_{k\in\mathbb{N}} 10^k\alpha \in \mathbb{Z}$), moglibyśmy konstruować przekroje ograniczając się do liczb wymiernych "o mianownikach typu 10^k", czyli "dziesiętnie wymiernych". Klasę dolną przekroju moglibyśmy zastąpić przez jej podzbiór złożony z kolejnych przybliżeń dziesiętnych dla x, uwzględniających coraz dalsze liczny po przecinku, ale taka konstrukcja nie jest zbyt wygodna dla celów przedstawionych poniżej, gdzie jednak liczby traktujemy jako "pełne" przekroje (dokładniej, klasy dolne).

W zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich tak zdefiniowanych liczb rzeczywistych nierówność $A \leqslant B$ definiujemy przez warunek

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Działanie dodawania określamy wzorem $A + B = \{\alpha + \beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$. Stosunkowo łatwo zauważyć, że dla $t, s \in \mathbb{Q}$ mamy $s^* + t^* = (s+t)^*$. Podobnie definiujemy iloczyn (na przykład -w przypadku $A \geqslant 0^*, B \geqslant 0^*$ przyjmując $AB = \{\alpha\beta : \alpha \in A \wedge \alpha \geqslant 0, \beta \in B \wedge \beta \geqslant 0\} \cup 0^*$.)

Należy zdefiniować też liczbę prciwną: $-A$ do liczby rzeczywistej A. W przypadku niewymiernym jest to przekrój $\{-s : s \in \mathbb{Q} \setminus A\}$, w przypadku wymiernym trzeba usunąć z tego zbioru jeszcze element największy. (Można podać nieco inną jednolitą definicję przekroju $-A$). W ten sposób zdefiniowane, działania te są zgodne ze wcześniej poznanymi działaniami na liczbach wymiernych.

Relacja porządku w $\mathbb{R}$ jest liniowa, tzn. zachodzi dychotomia: albo $A \leqslant B$, albo $B < A$.

$\mathbb{Q}$ jest *podzbiorem gęstym* w $\mathbb{R}$, tzn. $a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists_{r\in\mathbb{Q}}\ a < r < b$.

Podstawową własność (=ciągłość) zbioru liczb rzeczywistych, która jest w zasadzie głównym celem konstrukcji Dedekinda poznamy w następnym podrozdziale.

1.6 Ograniczenia i kresy, ciągłość osi liczbowej

Ustalmy niepusty podzbiór E zawarty w osi liczbowej $\mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $T \in \mathbb{R}$ jest *ograniczeniem górnym (*lub: *majorantą)* dla zbioru E, gdy $\forall_{a\in E}\, a \leqslant T$. Wówczas każda liczba T_1 większa od T też jest majorantą dla E. Może się zdarzyć, że jakaś majoranta należy również do samego zbioru E -wówczas jest to tak zwany element największy zbioru E, oznaczany jako $\max(E)$. Na przykład, $\max([a, b]) = b$, zaś $\max([a, b))$ nie istnieje. Zbiór nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy ma jakąś majorantę (czyli gdy zbiór majorant nie jest pusty). Analogicznie definiujemy minoranty (=ograniczenia dolne), elementy najmniejsze (ozn. $\min(E)$) i ograniczoność z dołu. Zbiór ograniczony, to zbiór ograniczony równocześnie z dołu i z góry.

Definicja 2 *Kresem górnym (supremum) zbioru E nazywamy najmniejszą z jego majorant. Kresem dolnym (infimum) zbioru E nazywamy największą minorantę tego zbioru. Kresy te oznaczamy odpowiednio:* $\sup(E)$, $\inf(E)$.

Zauważmy, że $\alpha = \inf(E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

- $\forall_{t\in E}\ \alpha \leqslant t$ oraz
- $(\forall_{t\in E}\ x \leqslant t) \Rightarrow x \leqslant \alpha$.

Pierwszy z tych warunków stwierdzam że α jest minorantą, drugi mówi, że wszystkie inne minoranty są mniejsze od α. Inne równoważne sformułowanie (przez kontrapozycję) tego drugiego warunku brzmi:

- $x > \alpha \Rightarrow \exists_{t_0\in E}\, t_0 < x$. ($x$ nie jest minorantą, gdy tylko $x > \alpha$.)

Zastępując $\mathbb{R}$ przez dowolny zbiór z relacją częściowego porządku można podać identyczne definicje (majorant, minorant i kresów). W szczególności, można pytać o kresy w obrębie zbioru liczby wymiernych. Okazuje się, że pewne zbiory ograniczone liczb wymiernych (np. zbiór $A = \{t \in \mathbb{Q} :\ t^2 < 2\}$) nie mają kresów w zbiorze $\mathbb{Q}$. Faktycznie, gdy y jest majorantą dla A, to nie może być $y^2 < 2$. W przeciwnym przypadku znajdziemy odpowiednio duże $n \in \mathbb{N}$ tak, by nadal było $y + \frac{1}{n} \in A$. Faktycznie, $(y + \frac{1}{n})^2 = y^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant y^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}$ Aby ostatnia liczba była mniejsza od 2 wystarczy, by $n > \frac{2t+1}{2-n^2}$. Jak wykazaliśmy na wykładzie, jeśli $y \in \mathbb{Q}$, to nie może być $y^2 = 2$. Pozostaje więc ostatnia możliwość, mamy $y^2 > 2$. Teraz podobnie rozumując sprawdzamy, że jednak liczba $z := y - \frac{1}{m}$ dla dostatecznie dużego m również spełnia $z^2 > 2$ oraz z jest majorantą dla A.(Wystarczy, by $y^2 - \frac{2}{m} > 2$.) To przeczy minimalności y pośród wszystkich majorant zbioru A.

O wyjątkowości zbioru $\mathbb{R}$ świadczy następujący rezultat, znany jako **twierdzenie o ciągłości** $\mathbb{R}$: (niezbędne np, dla wykazania, że ciąg rosnący i ograniczony ma granicę)

Twierdzenie 1 *Każdy niepusty i ograniczony z góry (odp. z dołu) zbiór liczb ma w $\mathbb{R}$ kres górny (odpowiednio, dolny) .*

SZKIC DOWODU: Jest to twierdzenie o istnieniu, dowodząc musimy więc wskazać na liczbę rzeczywistą $A \in \mathbb{R}$, która będzie kresem zadanego zbioru $E \subset \mathbb{R}$, o ile $E \neq \emptyset$ oraz E jest ograniczony z góry. Zarówno szukane A, jak i dowolny element $x \in E$ -są to liczby rzeczywiste, czyli przekroje Dedekinda, a więc zbiory. E jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{Q}$. Zdefiniujmy A jako sumę mnogościową rodziny wszystkich zbiorów x takich, że $x \in E$. (Na wykładzie definiowaliśmy sumę rodziny zbiorów, tu mamy $A = \bigcup E$ przypomnijmy, że

$$A = \{t \in \mathbb{Q} :\ \exists_{x\in E}\ t \in x\}.$$

Można łatwo sprawdzić -na przykład, używając tezy (2), że jest to przekrój. Ponieważ $x \subset A$ dla wszystkich $x \in E$, mamy $x \leqslant A$, czyli A jest majorantą dla E.Podobnie, z (2) otrzymujemy minimalność A wśród majorant E. Stąd $A = \sup(E)$ (QED).

1.7 Funkcje ograniczone, monotoniczne, parzyste

Te definicje podam na wykładzie. Np. mówimy, że $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca (silnie), jeśli $(t, s \in D \wedge t < s) \Rightarrow h(t) < h(s)$. Wynika stąd injektywność funkcji f.

Gdy dziedzina $D(f)$ jest symetryczna względem zera, czyli gdy $t \in D(f) \Rightarrow -t \in D(f)$, to f nazywamy funkcją nieparzystą, jeśli $\forall_{t\in D(f)}\ f(-t) = -f(t)$; odpowiednio -parzystą, gdy $f(-t) = f(t)$. Można wykazać, że wielomian postaci $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_k t^k$ jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich liczb nieparzystych $m \in [1, k] \cap \mathbb{N}$ jest $a_m = 0$. Iloczyn dwu funkcji parzystych, lub dwu nieparzystych -jest parzysty, natomiast iloczyn jednej funkcji parzystej i drugiej -nieparzystej jest funkcją nieparzystą. Podobnie jest dla złożeń.

Ograniczoność funkcji na zbiorze E oznacza ograniczoność obrazu zbioru E przez tę funkcję. Jeśli dziedziną funkcji jest zbiór liczb naturalnych, funkcję $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągiem i wartości h w punkcie n, zamiast $h(n)$, zapisujemy jako h_n. Sam ciąg o wyrazach h_n oznaczamy (h_n). Mówimy wówczas o ciągach rosnących (odp. niemalejących, malejących, nierosnących, monotonicznych), gdy odpowiednie własności przysługują im jako funkcjom.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy
(1) ciąg (h_n) jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}} h_n \leqslant h_{n+1}$
(2) czy malejący jest każdy z ciągów: $(\frac{n+1}{2^{n+1}}), (\frac{2^n}{n!}), \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}$
(3) złożenie dwu funkcji malejących jest monotoniczne
(4)Funkcja odwrotna do rosnącej jest też rosnąca
Dla f rosnącej i dla $E \subset D(f)$mamy $\max(f[E]) = f(\max(E))$
(5) Podać przykład bijekcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest monotoniczna
(6*)Przypuśćmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca. Na ogół nierówność $f(\sup(E)) \geqslant \sup(f[E])$ może być ostra. Jednak gdy dla pewnego punktu $x \in E$ obraz przez f przedziału o końcach x oraz $\sup(E)$ jest przedziałem, (spróbować) wykazać równość.
(7) Sprawdzić, że $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(8) Dla ciągu o wyrazach $a_n > 0$ niech $E_n = [0, a_n)$. Sprawdzić, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = [0, \alpha)$ dla $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(9) Czy funkcja odwrotna do nieparzystej jest funkcją nieparzystą?
(10) Gdy $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, wykazać ,że funkcje g_1, odpowiednio g_2 określone wzorami $g_1(x) = \frac{g(x)-g(-x)}{2}$, $g_2(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2}$ są odpowiednio: nieparzysta i parzysta, zaś $g = g_1 + g_2$.

Równość opisana w podpunkcie (6) zachodzi dla tzw. funkcji ciągłych. (Definicja ciągłości będzie nieco później -wszystkie rozważane przez nas funkcje elementarne są ciągłe na swych naturalnych dziedzinach.)

2 Przegląd wybranych funkcji elementarnych

Funkcja określająca znak liczby x, oznaczana $\mathrm{sgn}(x)$ przyjmuje wartość -1 dla $x < 0$, zero -dla $x = 0$ oraz 1 dla $x > 0$. (Z pewnych względów nie uznajemy jej za funkcję elementarną)

Moduł $|x|$ (czyli wartość bezwzględną) liczby x można teraz zdefiniować jako iloczyn: $|x| := x \cdot \mathrm{sgn}(x)$. Mamy równoważność:

$$|x| \leqslant M \ \Leftrightarrow\ (-M \leqslant x \wedge x \leqslant M).$$

Otrzymamy stąd łatwo tzw. *nierówności trójkąta:*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Funkcje wielomianowe (*wielomiany*), to funkcje postaci

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Jeśli dla tak zapisanego w jest $a_n \neq 0$, to n nazywamy stopniem w, pisząc $n = \deg(w)$ (po angielsku: *degree of a polynomial* = stopień (jakiegoś) wielomianu).

2.0.1 Funkcja wykładnicza o podstawie a

–to funkcja $\mathbb{R} \ni x \to a^x \in \mathbb{R}_+$ zdefiniowana w następujący sposób:

W przypadku $a = 1$ możemy wprost zdefiniować $1^x = 1$. Dalej zakładamy, że $a \neq 1, a > 0$.

1. Dla $x = 0$ przyjmujemy $a^0 = 1$,
2. dla $n \in \mathbb{N}$ definicja a^n ma charakter rekurencyjny: $a^n := a \cdot a^{n-1}$. (Gdy $n = 1$, mamy wcześniej zdefiniowane $a^{1-1} = a^0 = 1$, więc $a^1 = a \cdot 1 = a$.
3. Następnie dla ujemnych liczb całkowitych (postaci $k = -n, n \in \mathbb{N}$) przyjmujemy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
4. Dla ułamków postaci $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ funkcja potęgowa $g : \mathbb{R}_+ \ni x \to x^n \in \mathbb{R}_+$ jest bijekcją, co wykażemy nieco później, korzystając z własności funkcji ciągłych. Funkcję odwrotną nazywamy *funkcją pierwiastkową stopnia n*, zamiast $x = g^{-1}(y)$ piszemy $x = \sqrt[n]{y}$, lub $x = y^{\frac{1}{n}}$.

5. Dla dowolnej liczby wymiernej $r \in \mathbb{Q}$ mamy $r = \frac{k}{n}$ dla pewnych liczb $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, definiujemy $a^r := (a^{\frac{1}{n}})^k$.

Tak zdefiniowana potęga liczby a o wykładniku wymiernym ma pewne własności (one wręcz narzucają sposób definiowania tych potęg) i sprawdzamy je najpierw dla wykładników naturalnych, stosując metodę indukcji, potem przechodząc przez etapy 3,4,5 tej definicji. Zbierzemy je w poniższym zadaniu.

Zadanie 7. Wykazać, że

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad a^{rs} = (a^r)^s, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}.$$

Sprawdzić, że dla $a > 1$ funkcja $\mathbb{Q} \ni r \to a^r$ jest silnie rosnąca, zaś w przypadku $a < 1$ –silnie malejąca.

Definicję a^x dla dowolnego wykładnika (niekoniecznie wymiernego) $x \in \mathbb{R}$ w przypadku $a > 1$ wprowadzamy wzorem:

$$a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

W przypadku $a < 1$ jest $\frac{1}{a} > 1$ i przyjmujemy $a^x := (\frac{1}{a})^{-x}$. Własności podane w poprzednim zadaniu zachodzą również dla wykładników dowolnych.

2.0.2 Logarytmy

Dla $a > 0, a \neq 1$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \to a^x$ jest silnie monotoniczna, przyjmuje każdą wartość dodatnią w pewnym punkcie (dowód później) i funkcję odwrotną nazywamy *logarytmem o podstawie* a, oznaczając ją $\log_a$. Tak więc

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Dziedziną logarytmu jest $(0, +\infty)$, zbiorem przyjmowanych wartości jest $\mathbb{R}$. W oparciu o własności z poprzedniego zadania wykazujemy, że

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Podstawę logarytmów naturalnych oznaczamy symbolem e i definiujemy jako granicę: $e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zamiast $\log_e x$ piszemy (w Polsce) $\ln x$. Zapis $\log x$ w polskiej literaturze oznacza $\log_{10} x$, zaś w literaturze anglojęzycznej $\log x = \log_e x$ (oni nie stosują raczej symbolu $\ln x$). Funkcję wykładniczą o podstawie e oznaczamy exp, tzn. $\exp(x) = e^x$ i nazywamy też *funkcją eksponencjalną* (eksponentą x). Tak więc, $\ln = (\exp)^{-1}$ (tu wykładnik -1 oznacza funkcję odwrotną!).

2.1 Funkcje trygonometryczne

Na poprzednim wykładzie przypomniałem jeszcze definicje funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych. Przypomnijmy, że będziemy określać wielkość kąta w *mierze łukowej*. Przez kąt ϕ, gdzie $\phi \in \mathbb{R}$ rozumiemy kąt oparty na łuku okręgu jednostkowego o długości ϕ, którego początek leży na półosi dodatniej. Łuk ten odmierzamy w kierunku "dodatnim", czyli przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, o ile $\phi \geqslant 0$, zaś w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara, gdy $\phi < 0$. Jednostką miary kąta odpowiadającą łukowi o długości takiej, jak promień koła (ang. "radius") nazywamy *radianem.* Kąt o mierze α stopni ma $\pi \cdot \frac{\alpha}{180}$ radianów. Wartości funkcji trygonometrycznych można odczytać patrząc na okrąg jednostkowy -konkretnie, koniec łuku odpowiadającego ϕ radianom ma współrzędne: $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi)$ w układzie kartezjańskim. Tak jest dla dowolnych $\phi \in \mathbb{R}$. Wartość $\operatorname{tg}\phi$ -jedynie dla $|\phi| < \frac{\pi}{2}$- odczytujemy przedłużając promień przechodzący przez ten koniec łuku do punktu przecięcia z prostą o równaniu $x = 1$. Ten punkt przecięcia ma współrzędne $(1, \operatorname{tg} \phi)$. Ponadto $\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$. Wartość kotangensa, $\operatorname{ctg} \phi$ definiujemy jako $\frac{1}{\operatorname{tg} \phi}$. (Uwaga: anglojęzyczne książki zamiast symbolu tg używają tan, zaś zamiast ctg -symbolu cot.)

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych -a jest ich wiele -można znaleźć w tablicach matematycznych. Wymieńmy tylko parę przykładowych:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1, \ \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha = -\cos(\pi + \alpha), \ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \ \ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \ \ 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Funkcje te są okresowe, okres podstawowy dla sin oraz cos wynosi 2π, okresem podstawowym dla tg, ctg jest π. Funkcja cos jest parzysta, pozostałe trzy są nieparzyste. Z interpretacji na kole trygonometrycznym wynikają dla $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ nierówności: $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2.2 Funkcje cyklometryczne

Jak nazwa wskazuje, mierzą one długość łuku okręgu na podstawie danej jednej ze współrzędnych punktu będącego końcem tego łuku na okręgu jednostkowym. Definiuje się je jako odwrotne do restrykcji funkcji trygonometrycznych:

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, \quad \arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}.$$

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór $[-1, 1]$. Jest to bowiem zbiór wszystkich wartości przyjętych przez funkcje sin (odpowiednio, cos) na tych przedziałach (dowód- później).

Analogicznie, definiujemy

$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, \quad \operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1},$$

obie na dziedzinach równych $\mathbb{R}$, pierwsza z tych funkcji jest rosnąca (por. zadanie 6.(4)) i nieparzysta, druga maleje. Wykresy przedstawiam na wykładzie.

Oprócz profesjonalnych programów typu: „Mathematica", „Mathlab" jest wiele prostych, darmowych narzędzi do tworzenia wykresów funkcji (np. program GraphCalc), do których linki można znaleźć na stronie
http://pobierz.pl/programy/windows/edukacja-i-nauka/matematyka-i-fizyka

2.3 Funkcje hiperboliczne

Hiperbolą nazywamy krzywą będącą wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$, czyli krzywą o równaniu $xy = 1$ ale również hiperbolami są krzywe powstałe z tej krzywej przez obrót, symetrię względem prostej, lub podobieństwo. Przekształcenie zmiennych x, y na u, v, gdzie $u = (x + y), v = x - y$ jest złożeniem obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$ z podobieństwem w skali $\sqrt{2}$ i przekształcając otrzymamy równanie hiperboli w postaci $(x + y)(x - y) = 1$, czyli $x^2 - y^2 = 1$. Obrazem osi układu (asymptot hiperboli) $\{(x; y) : xy = 1\}$ jest para prostych o równaniach $x = y, x = -y$ -to są asymptoty ukośne hiperboli $\{(x; y) : x^2 - y^2 = 1\}$. Ograniczmy się do gałęzi $\{(x; y) : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ (przecinającej oś OX w punkcie $(1, 0)$). Jeśli na niej oznaczymy punkt P jako koniec łuku o długości φ o początku w $(1; 0)$ skierowanego ku górze, gdy $\varphi > 0$, ku dołowi dla $\varphi \leqslant 0$, otrzymamy punkt P o współrzędnych $(\cosh(\varphi); \sinh(\varphi))$. Tak geometrycznie można zdefiniować funkcje: sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny. (Gdy łuk na hiperboli zastąpimy łukiem na okręgu, otrzymamy zwykły sinus i cosinus kąta φ.)

Ponieważ na razie nie mamy prostych wzorów na długości łuków hiperboli, podamy jako "oficjalną definicję" inny wzór dla dowolnego $\varphi \in \mathbb{R}$ (jako część parzystą -odp. nieparzystą- z funkcji wykładniczej):

$$\sinh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \qquad \cosh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}.$$

Ponadto mamy tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny :

$$\mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \mathrm{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Niektóre wzory dla funkcji hiperbolicznych przypominają wzory trygonometryczne. Pozostawiamy je do sprawdzenia jako proste ćwiczenie.

Zadanie 8. Wykazać następujące równości: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ („jedynka hiperboliczna"), $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$, $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$, $\cosh(2t) = (\cosh t)^2 + (\sinh t)^2$.

Wykresy funkcji (nieparzystej) sinh oraz (parzystej) cosh nie są do siebie wcale podobne. Pierwsza z nich przypomina nieco wykres funkcji $y = x^3$ - jednak w zerze przecina oś OX pod kątem $\pi/4$ i dla dużych x rośnie znacznie szybciej. Jest bijekcją $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Druga spełnia warunek $\forall_x \cosh x \geqslant 1, \cosh 0 = 1$.

Funkcje hiperboliczne odwrotne są określane jako „*funkcje polowe*" : area sinus hiperboliczny =arsinh $= (\sinh)^{-1}$. Rozwiązując równanie wykładnicze otrzymamy $\mathrm{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Area cosinus hiperboliczny arsinh $= (\cosh)^{-1}$ spełnia relację arcosh $y = \ln(y + \sqrt{y-1}\sqrt{y+1})$.

Nazwa pochodzi od równości pola obszaru zawartego między odcinkami [O,P], [O,(1;0)] i wspomnianym łukiem na hiperboli z wartością $\frac{\varphi}{2}$, podczas gdy $P = (\cosh\varphi; \sinh \varphi)$, zaś $\mathrm{arsinh}(\sinh \varphi) = \varphi$.

2.4 Ciągi i ich granice

Ciąg (oznacz. (f_n) lub $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) w zbiorze Y, to funkcja $f : \mathbb{N} \to Y$. Zamiast $f(n)$ piszemy jednak f_n i element ten nazywamy n-tym wyrazem naszego ciągu. Częściej niż f używamy innych liter. Często podajemy sam wzór na n-ty wyraz ciągu, np. $(1 + \frac{1}{n})^n$. Gdy $Y \subset \mathbb{R}$, mówimy o ciągach liczbowych. Ciąg jest niemalejący, gdy określająca go funkcja jest niemalejąca na dziedzinie $\mathbb{N}$.

Definicja 3 *(***Granicy ciągu***). Mówimy, że ciąg liczbowy o wyrazach a_n zmierza (jest zbieżny) do granicy $g \in \mathbb{R}$, pisząc $g = \lim a_n$ lub $a_n \to g$, jeśli*

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant M} \ |a_n - g| < \epsilon.$$

Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$ o powyższej własności.

Na przykład, ciąg stały (czyli taki, że $\forall_n \ a_n = n_{n+1}$) jest zbieżny (do $g = a_1$). Ciąg kolejnych liczb naturalnych ($a_n = n$) nie jest zbieżny do żadnej granicy, bo gdy $\epsilon = 1$, dla dowolnego g mamy $|g - n| \geqslant 1$, o ile tylko $n > g + 1$. Ten ciąg nie jest ograniczony, jest rosnący. Ale nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny -na przykład, nie istnieje granica ciągu o wyrazach $(-1)^n$.

Jeżeli g jest granicą ciągu, fakt ten zapisujemy też symbolem $a_n \to g$. Gdy ciąg jest niemalejący: $\forall_n \ a_n \leqslant a_{n+1}$, zamiast $a_n \to g$ piszemy czasem $a_n \uparrow g$.

Zauważmy, że $|a_n - g| < \epsilon$ można zapisać w postaci koniunkcji nierówności:

$$g - \epsilon < a_n < g - \epsilon.$$

Przedział otwarty $(g - \epsilon, g - \epsilon)$ nazwiemy ϵ-otoczeniem punktu g na osi liczbowej. Wówczas zbieżność $a_n \to g$ można wyrazić słowami: *w dowolnym otoczeniu punktu g znajdują się wszystkie -począwszy od pewnego miejsca - wyrazy ciągu.*

Niech $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (**rozszerzona oś liczbowa**). Dla $E \subset \mathbb{R}$ przyjmujemy $\sup E = +\infty$(odp. $-\infty$), gdy zbiór E nie jest ograniczony z góry (odpowiednio, z dołu).

Granice Niewłaściwe Mówimy, że *ciąg* (a_n) *jest rozbieżny do* $+\infty$, pisząc $\lim a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$, gdy $\forall_{M \in \mathbb{R}} \exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} \ a_n > M$. Zamieniając warunek $a_n > M$ na $a_n < M$ otrzymamy definicję warunku $a_n \to -\infty$.

Twierdzenie 2 (O JEDNOZNACZNOŚCI GRANIC) *Jeżeli mamy zarówno* $a_n \to g$*, jak i* $a_n \to g_1$*, to* $g = g_1$.

Twierdzenie 3 *Zbieżność nie zależy od początkowych wyrazów ciągu: Gdy* $\exists_k \forall_{n \geqslant k}\ a_n = b_n$*, to* $a_n \to g \Leftrightarrow b_n \to g$.

Twierdzenie 4 (O ISTNIENIU GRANIC CIĄGÓW MONOTONICZNYCH) *Gdy ciąg* (a_n) *jest monotoniczny (nierosnący, bądź niemalejący), to ma granicę* $g \in \overline{\mathbb{R}}$*. Granica ta jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jest ograniczony. Dokładniej, gdy* (a_n) *jest niemalejący, to* $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*, a ciąg malejący - zmierza do kresu dolnego jego zbioru wyrazów.*

Twierdzenie 5 (O TRZECH CIĄGACH) *Gdy* $\forall_n\, a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *oraz istnieją (jednakowe) granice* $g = \lim a_n = \lim c_n$*, to ciąg* (b_n) *też zmierza do* g.

Twierdzenie 6 (O PRZECHODZENIU DO GRANICY W NIERÓWNOŚCIACH) *Jeżeli* $a_n \to g$ *oraz* $b_n \to g_1$*, przy czym* $\forall_n\ a_n \leqslant b_n$*, to* $g \leqslant g_1$.

Zauważmy, że dla ostrych nierówności: $\forall_n a_n < b_n$ nie można uzyskać wniosku o ostrej nierówności granic! Natomiast mamy

Twierdzenie 7 *Jeżeli* $\lim a_n = g$ *oraz* $g < x$*, to również* $a_n < x$ *od pewnego miejsca począwszy, czyli* $\exists_k \forall_{n \geqslant k}\ a_n < x$.

Twierdzenie 8 *Każdy ciąg zbieżny (czyli mający granicę skończoną) jest ograniczony:* $\exists \lim a_n = g \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$.

Twierdzenie 9 *Jeżeli* $a_n \to 0$ *oraz* $\sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$*, to* $a_n \cdot b_n \to 0$.

Twierdzenie 10 (O SUMIE GRANIC) *Jeżeli* $a_n \to g$ *oraz* $b_n \to g_1$*, to* $a_n + b_n \to g + g_1$.

Twierdzenie 11 (O ILOCZYNIE GRANIC) *Jeżeli* $a_n \to g$ *oraz* $b_n \to g_1$*, to* $a_n \cdot b_n \to g \cdot g_1$.

Twierdzenie 12 (O ILORAZIE GRANIC) *Jeżeli* $a_n \to g$ *oraz* $b_n \to g_1$*, przy czym* $g_1 \neq 0$ *to* $b_n \neq 0$ *począwszy od pewnego miejsca oraz* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{g}{g_1}$.

3 Granice -c.d.

3.1 Symbole nieoznaczone

Twierdzenia o „arytmetyce granic” w pewnych przypadkach można też stosować dla granic niewłaściwych. Gdy na przykład (a_n) jest ciągiem, dla którego $\lim |a_n| = +\infty$, to ciąg $\frac{1}{a_n}$ zmierza do zera, jak łatwo sprawdzić stosując definicje. Mówimy, że jest to „przypadek typu $\frac{1}{\infty} = 0$”. Podobnie, gdy ciąg (b_n) ma granicę skończoną $b \in \mathbb{R}$, zaś $a_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$ -tę regułę możemy zakodować w postaci „przepisu”: $b + \infty = +\infty$ Gdy ponadto $b > 0$, to również $a_n \cdot b_n \to +\infty$, co zakodujemy jako $b \cdot (+\infty) = +\infty$. W ten sposób możemy na rozszerzonej osi liczbowej określić działania tak, by były zgodne z odpowiednimi twierdzeniami o arytmetyce granic. Ale (UWAGA!) nie do końca -nie można w sposób sensowny zdefiniować działań typu $+\infty + (-\infty)$ (czyli $\infty - \infty$), $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, ∞^0 -zwanych *symbolami nieoznaczonymi*. Przykładem symbolu ostatniego typu jest ciąg $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$, który zmierza do 1. Ciąg $\sqrt[n]{(n!)}$, choć tego samego typu ∞^0, jest rozbieżny do $+\infty$. Łatwo teraz podać przykład ciągu typu ∞^0, który nie ma granicy ani skończonej, ani nieskończonej. Każdy z ciągów podpadających pod typ symbolu nieoznaczonego trzeba rozpatrywać oddzielnie.

Przykłady: Gdy $u(x), w(x)$ są wielomianami stopni $p, q > 0$, których wyrazy o najwyższych potęgach są dodatnie, to dla $p < q$ mamy $\lim \frac{u(n)}{w(n)} = 0$, dla

$p > q$ jest $\lim \frac{u(n)}{w(n)} = +\infty$. Gdy $u(x) = ax^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p$, $w(x) = bx^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p$, gdzie $b \neq 0$, to $\lim \frac{u(n)}{w(n)} = \frac{a}{b}$. (typ $\frac{\infty}{\infty}$)

$\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = 0$, natomiast $\lim n^2 - n = +\infty$ (typ $\infty - \infty$)

$\lim a^n$ wynosi: zero w przypadku $0 \leqslant a < 1$, odpowiednio $+\infty$ dla $a > 1$. W tym ostatnim przypadku również $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$ dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$.

3.2 Najważniejsze przykłady granic ciągów

Przykłady te możemy zebrać w paru podpunktach:

1. Dla $a > 1$ $\lim a^n = +\infty$. Natomiast $\forall_{|b|<1}\ b^n \to 0$
2. Dla $a > 0$ mamy $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
3. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
4. Gdy $x_n \to +\infty,\ k > 0$, to $(x_n)^k \to +\infty$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$ dla $a > 1, k \in \mathbb{N}$.
6. $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$
7. $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, gdzie $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n$.

(Pierwsze trzy równości uzasadniam na wykładzie. Tezę 4. sprowadzić można (podstawiając $\frac{1}{q} \in (0, k)$ dla dostatecznie dużego $q \in \mathbb{N}$ zamiast k, bo od pewnego miejsca $\sqrt[q]{x_n} \leqslant (x_n)^k$. Dla ustalonego $M > 0$ ze zmierzania x_n do $+\infty$ znajdziemy n_0 takie, by dla $n \geqslant n_0$ było $x_n > M^q$ Wtedy $\sqrt[q]{x_n} > M$.

Ponieważ $\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{b^n}{n}\right)^k$ dla $b = a^{\frac{1}{k}}$, stosując 4. widzimy, że wystarczy wykazać tezę dla $k = 1$. Zapisując $a = 1 + \delta$, gdzie $\delta > 0$, mamy (pomijając pozostałe składniki dwumianu Newtona) $a^n = (1 + \delta)^n \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2$, dzieląc stronami przez n otrzymamy $\frac{a^n}{n} \geqslant \frac{1}{2}(n-1)\delta^2 \to +\infty$. (Por. punkt 7 po tw.16)

Dla $\epsilon > 0$ mamy $e^\epsilon > 1$, więc (dzięki 3.) dla n dostatecznie dużych jest $\sqrt[n]{n} < e^\epsilon$. Logarytmując stronami (ponieważ funkcja $\ln(\cdot)$ jest rosnąca) otrzymamy dla takich n oszacowanie $\frac{\ln n}{n} < \epsilon$. Oczywiście, wyrazy tego ciągu są dodatnie, więc większe od $-\epsilon$. Do dowodu tezy 7. stosujemy uwagę 7 po tw.16 (dwie str. dalej).

3.3 Przydatne nierówności

Oprócz nierówności trójkąta (wspomnianej w p. 2.5), skorzystamy z obydwu nierówności z zadania 3. Ustalmy liczby $x_1, \ldots, x_n$ i niech $A = A(x_1, \ldots, x_n)$ oznacza ich średnią arytmetyczną: $A = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Średnią geometryczną $G = G(x_1, \ldots, x_n)$ tych liczb definiujemy jako $\sqrt[n]{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)}$. Średnią harmoniczną określamy jako $H = H(x_1, \ldots, x_n) = (A(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}))^{-1}$.

Twierdzenie 13 *Mamy następujące „Nierówności AGH": $A \geqslant G \geqslant H$.*

Dla dowodu pierwszej z nierówności wystarczy zastosować implikację z zadania 3. dla a_j zdefiniowanych jako $\frac{x_j}{G}$. Drugą nierówność otrzymamy z pierwszej, gdyż $(G(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})) = \frac{1}{G}$, zaś funkcja $x \mapsto \frac{1}{x}$ jest malejąca.

Wykorzystamy to dla wykazania, że ciąg o wyrazach $(1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony z góry. Faktycznie, aby sprawdzić, czy $(1 + \frac{1}{n})^n \leqslant (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ wystarczy wiedzieć, że $\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n} \leqslant 1 + \frac{1}{n+1}$. Przyjmując $x_1 = 1, x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ widzimy, że lewa strona naszej nierówności, to $G(x_1, \ldots, x_{n+1})$, podczas gdy prawa jest równa średniej arytmetycznej. Dowodzona nierówność sprowadza sie do nierówności $A \geqslant G$. Ograniczoność można wykazać np. wykazując w podobny sposób, że ciąg $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ maleje.

Nierówności dla wybranych funkcji:

1. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$

2. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|$

3. $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leqslant |x-y|\frac{1}{|xy|} \leqslant |x-y|M$ gdy $\frac{1}{M} \leqslant \min(|x|,|y|)$

4. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant |x-y|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ gdy $x, y > 0$

5. $|x^n - y^n| \leqslant |x-y|nK$, gdzie $K = \max(|x|^{n-1}, |y|^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

6. $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)||g(x)| + |f(y)||g(x) - g(y)|$

Jeżeli h jest jedną z funkcji rozważanych w podpunktach 1.- 5., to ze zbieżności $x_n \to y$ będzie wynikać (o ile $y \neq 0$ -dla p. 3,4), że również $h(x_n) \to h(y)$. Dla funkcji pierwiastek kwadratowy analogiczna teza zachodzi też dla $y = 0$. Jak wkrótce się przekonamy, wszystkie funkcje elementarne mają taką własność (którą nazwiemy później ciągłością) w każdym z punktów y należącym do ich dziedziny naturalnej. Dla tych funkcji operacje: wyliczania wartości w punktach i brania granic ciągów można wykonywać w dowolnej kolejności. Np. $\sqrt{\lim x_n} = \lim \sqrt{x_n}$.

3.4 Podciągi, ciągi Cauchy'ego

Podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy złożenie tego ciągu (traktowanego jako funkcja $\mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{R}$ z pewnym ciągiem rosnącym $\mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$, przyjmującym wartości naturalne. Taki podciąg zapisujemy w postaci $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Np., wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą w ciągu (a_n) podciąg (a_{2k-1}).

Twierdzenie 14 *Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy*

Twierdzenie 15 (Bolzano-Weierstassa) *Każdy ciąg liczbowy ograniczony zawiera pewien podciąg zbieżny*

Definicja 4 *Ciąg liczbowy (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{k,m\geqslant n_0}\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Twierdzenie 16 *Ciąg liczbowy jest zbieżny (ma granicę skończoną) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on warunek Cauchy'ego.*

Jest to w praktyce jedyne kryterium gwarantujące zbieżność ciągu, o którym nie wiemy, czy jest monotoniczny i nie znamy konkretnej wartości jego granicy.

Dalsze przykłady: twierdzenie o granicach podciągów zbieżnych, choć bardzo proste w dowodzie, daje możliwości licznych zastosowań. Omawiam je na wykładzie. Przykładowo:

1. Jeśli pewna dwa podciągi mają różne granice, to ciąg nie może być zbieżny (np. podciągi złożone z wyrazów o indeksach parzystych (odp. -nieparzystych) ciągu $(-1)^n$.

2. Jeśli wiemy, że dany ciąg jest zbieżny (np. do g), to jego granicę możemy odnaleźć badając relację pomiędzy granicą g i granicą jego odpowiedniego podciągu (też g). Np. dla $a > 1$, $a_n := \sqrt[n]{a}$ mamy $(a_{2n})^2 = a_n$, więc $g^2 = g$. Ponieważ $a_n > 1$, drugie z rozwiązań równania $g^2 - g = 0$ -a mianowicie, $g = 0$ odrzucamy, więc musi być $g = 1$. Jeszcze lepiej widać to na przykładzie ciągów, które definiujemy podając osobno pierwszy wyraz: x_1 oraz wyrażając wartość x_{n+1} poprzez jakąś funkcję od x_n (lub funkcję od paru poprzednich wyrazów). Np. gdy $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$. Sprawdzamy istnienie granicy $\gamma = \lim x_n$ dowodząc (np. indukcyjnie) monotoniczność i ograniczoność naszego ciągu. Wówczas z równania $(x_{n+1})^2 = 1+x_n$ przechodząc stronami do granic przy $n \to \infty$, otrzymujemy $\gamma^2 = \gamma + 1$. Jeden z dwu pierwiastków jest tu ujemny, lecz $\gamma > 0$ (nawet $\gamma \geqslant 1$ dzięki zachowaniu słabych nierówności po przejściu do granic.) Wnioskujemy, że w naszym przypadku $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

3. Podobnie będziemy postępować w przypadku, gdy $x_{n+1} = f(x_n)$, jednak zamiast $\lim f(x_n)$ chcielibyśmy wstawić $f(\gamma)$, gdzie $\gamma = \lim x_n$. W następnym wykładzie zbadamy, dla jakich funkcji można tak zrobić. // [Ćwiczenie= sprawdzić, że wystarczy tu założyć, że istnieją liczby $\delta > 0$ oraz $M > 0$, takie, że dla $x \in (\gamma-\delta, \gamma+\delta)$ mamy $|f(x)-f(\gamma)| \leqslant M|x-\gamma|$. Właśnie taki charakter mają podane po twierdzeniu 13. nierówności.]

4. Dla ciągu określonego rekurencyjnie wzorem $x_n + 1 = f(x_n)$ jest jeszcze jeden (oprócz badania monotoniczności i ograniczoności) sposób wykazania, że ma on granicę. Tak będzie, gdy D jest przedziałem na osi liczbowej zawierającym wszystkie x_n (ten fragment często da się sprawdzić metodą indukcji) oraz gdy istnieje stała dodatnia $M < 1$ taka, że dla wszystkich $x, y \in D$ mamy $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.

5. Gdy z każdego podciągu ciągu (y_n) można wybrać dalszy podciąg zbieżny do ustalonej liczby g, to cały ciąg też musi zmierzać do tej liczby g. [Gdyby tak nie było, to z zaprzeczenia warunku z definicji granicy, dla pewnego $\varepsilon > 0$ nieskończenie wiele wyrazów ciągu znajdzie się poza przedziałem $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, a z nich już żadnego podciągu zbieżnego do g nie wybierzemy.]

6. Można wykazać, że gdy (x_n) jest ciągiem liczb dodatnich rozbieżnym do $+\infty$, to $\lim\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

7. Gdy $\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = g$, gdzie $y_n > 0$, to również $\lim \sqrt[n]{y_n} = g$ (Wskazówka poniżej). Wywnioskować stąd wzór 7. w podpunkcie 4.2

8. Sprawdzić, że $\lim\left(1 + \frac{5}{n^2+1}\right)^{n^2+n} = e^5$.

9. Korzystając z 4.2. 5. sprawdzić, że
$$\lim \sqrt[n]{3^n + \cos(n!) + n^3 + 2^{2n+7}} = 4.$$

10. Badając $\alpha := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ sprawdzić, że $\lim a_n = 0$, gdzie $a_n = \frac{2^n 3^{2n+1}}{n!}$, odpowiednio, $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $a_n = \frac{n^3}{2^n}$.
(*Wskazówka*: Gdy $|\alpha| < \beta < 1$, to dla dostatecznie dużych n (istnieje n_0 takie, że dla $n \geqslant n_0$) jest $|a_{n+1}| \leqslant \beta|a_n|$. Wówczas $|a_m| \leqslant |a_{n_0}|\beta^{m-n_0}$ dla $m \geqslant n_0$.)

Pojęcie kresu jest bardziej uniwersalne, niż pojęcie granicy ciągu, lecz mamy dwojakiej natury związki: Dla niepustego zbioru ograniczonego $E \subset \mathbb{R}$ łatwo sprawdzić, że jeśli liczba s jest jego majorantą, to albo $s \in E$ i wówczas $s = \max(E)$, albo istnieje ciąg silnie rosnący elementów $a_n \in E$ zbieżny do s. (w obydwu przypadkach s jest granicą ciągu niemalejącego elementów z E.

Końcówką ciągu (x_n) o numerze k, czyli k-tą końcówką nazwiemy ciąg $x_k, x_{k+1}, \ldots$. Kresy górne tych końcówek (dokładniej, zbiorów ich wyrazów) tworzą ciąg nierosnący, gdyż kres górny podzbioru jest zawsze nie większy, niż kres całego zbioru i tak otrzymany ciąg kresów, jako ciąg monotoniczny ma granicę na osi rozszerzonej (równą kresowi dolnemu). Granicę tę oznaczamy symbolem $\limsup x_n$ i nazywamy granicą górną tego ciągu. Tak więc
$$\limsup x_n = \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n : n \geqslant k, n \in \mathbb{N}\}.$$
Analogicznie możemy określić granicę dolną, $\liminf x_n$. Okazuje się, że $\liminf x_n = -\limsup -x_n$. Co ważniejsze, granice: górna i dolna -są to odpowiednio kresy: górny i dolny zbioru punktów skupienia (w $\overline{\mathbb{R}}$) ciągu (x_n), utworzonego z granic wszystkich podciągów, które są albo zbieżne, albo dążą do $+\infty$, lub do $-\infty$. Zaletą tych "granic ekstremalnych" jest ich istnienie dla każdego ciągu. Co więcej, ciąg ograniczony (x_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy gdy $g = \limsup x_n = \liminf x_n$.

Można też wykazać, że $s = \limsup x_n \Leftrightarrow s = \inf A$, gdzie A jest zbiorem takich liczb α, że nierówność $x_n > \alpha$ zachodzi jedynie dla skończenie wielu n. Możliwe są 2 przypadki: $s \in A$ albo $s \notin A$. W jednym z nich da się wybrać z (x_n) pewien podciąg niemalejący, a w drugim -nierosnący. Tylko w którym -który?

4 Granica funkcji, funkcje ciągłe

4.1 Punkty skupienia zbioru

Mówimy, że liczba x_0 jest *punktem skupienia zbioru* E, gdy dla każdego $\delta > 0$ przedział $(x - \delta, x + \delta)$ zawiera punkty zbioru E różne od x_0. (Wówczas musi on zawierać nieskończenie wiele punktów zbioru E, a nawet musi istnieć jakiś ciąg silnie monotoniczny punktów zbioru E zbieżny do x_0.

Zbiory skończone nie mają punktów skupienia, punkt należący do zbioru E nie musi być jego punktem skupienia (np. dla $E = [0, 1) \cup \{2\}$ taką własność ma punkt 2 -tu $(E \setminus \{2\}) \cap (2 - 1, 2 + 1) = \emptyset$. Natomiast punkt 1, który nie należy do tego zbioru -jest jego punktem skupienia.

Granica podciągu zbieżnego (x_{k_n}) w dowolnym ciągu (x_n) może nie być punktem skupienia zbioru $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ wyrazów tego ciągu (przykładem jest ciąg stały). Gdy jednak ciąg jest różnowartościowy, lub gdy $\lim x_n$ nie jest równa żadnemu z wyrazów tego ciągu -to granica będzie już punktem skupienia tego zbioru E.

4.2 Definicja granicy funkcji, warunek Heinego

August Cauchy podał następującą definicję: Zakładamy, że x_0 jest punktem skupienia dziedziny D_f funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$. Wówczas mówimy, że funkcja f ma granicę równą y_0 w punkcie x_0, (zapisując ten fakt symbolem

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x), \qquad \text{lub symbolem} \qquad f(x) \longrightarrow y_0 \quad \text{przy } x \to x_0)$$

jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D_f} \ \big(0 < |x - x_0| < \delta\big) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon.$$

Warunek ten nie zależy od tego, czy $x_0 \in D_f$, czy też nie, ani od wartości przyjmowanej przez f w punkcie x_0, jeśli $x_0 \in D_f$.

Granice niewłaściwe w punkcie x_0 definiujemy dla $y_0 = +\infty$ zastępując $\epsilon > 0$ przez $M \in \mathbb{R}$, zaś warunek $|f(x) - y_0| < \epsilon$ przez warunek $f(x) > M$. Podobnie, definiujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall_M \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D_f} \ \big(0 < |x - x_0| < \delta\big) \Rightarrow f(x) < M\big),$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall_M \exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{x \in D_f} \ \big(x > K\big) \Rightarrow f(x) < M\big),$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall_{\epsilon>0} \exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{x \in D_f} \ \big(x < K\big) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon\big).$$

Wzystkie te definicje można zunifikować, przedstawiając odpowiednie warunki przy użyciu pojęcia *otoczenia punktu.* Gdy $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest punktem rozszerzonej osi liczbowej, to zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazwiemy otoczeniem punktu p, gdy A zawiera dla pewnego $\delta > 0$ przedział $U_\delta(p)$ postaci: $U_\delta(p) = (p - \delta, p + \delta)$ -w przypadku $p \in \mathbb{R}$, odpowiednio -postaci $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$ w przypadku $p = -\infty$ oraz $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$ -dla $p = +\infty$. Zwyczajowo w matematyce symboli ϵ, δ używa się dla oznaczania raczej małych liczb, zaś w przypadku otoczeń punktów $\pm\infty$ istotniejsze są bardzo duże wartości , więc w odpowiednich warunkach zamiast δ znajdują się symbole K, M. Ale chwilowo podczas naszej „unifikacji” używamy wszędzie δ. W terminach otoczeń, pojęcie granicy można sformułować tak:

$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad$ każde otoczenie U punktu y_0 zawiera obraz przez funkcję f zbioru postaci $W \setminus \{x_0\}$, gdzie W jest otoczeniem punktu x_0, tzn. $f[W \setminus \{x_0\}] \subset U$.

Twierdzenie 17 (O zachowaniu nierówności dla granic) *Gdy $\lim_{x \to x_0} f(x) < \alpha$, to istnieje otoczenie W punktu x_0 takie, że $f(x) < \alpha$ dla wszystkich $x \in W \setminus \{x_0\}$.*

Okazuje się, że mamy też pewien warunek równoważny, sformułowany wyłącznie w terminach ciągów:

Warunek Heinego: Jeżeli (x_n) jest ciągiem punktów zbioru $D_f \setminus \{x_0\}$ zmierzającym do x_0 przy $n \to \infty$, to wartości $f(x_n)$ zmierzają do y_0.

Twierdzenie 18 *Funkcja f spełnia powyższy warunek Heinego wtedy i tylko wtedy, gdy $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.*

4.3 Definicja funkcji ciągłej

Mówimy, że $f : D_f \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą w punkcie* x_0, gdzie $x_0 \in D_f$, jeżeli albo x_0 nie jest punktem skupienia dziedziny, lub $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

W pierwszym przypadku dla pewnego $\delta > 0$ (i dla wszystkich mniejszych promieni) otoczenie punktu x_0 o promieniu δ, czyli przedział $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ma z dziedziną f tylko jeden punkt wspólny, a mianowicie x_0. W definicji granicy wykluczaliśmy ten punkt postulując, by $0 < |x - x_0|$. Tym razem -nie musimy. Otrzymujemy więc następujący równoważny zapis warunku ciągłości: Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D_f}\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Równoważny warunek sformułowany w języku ciągów, to

Warunek Heinego ciągłości: Jeżeli (x_n) jest ciągiem punktów zbioru D_f zbieżnym do x_0, to wartości $f(x_n)$ zmierzają do $f(x_0)$.

Mówimy, że *funkcja f jest ciągła*, gdy jest ona ciągła w każdym punkcie swej dziedziny. Wówczas $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ dla każdego ciągu punktów $x_n \in D_f$ zbieżnego do granicy należącej do D_f (w przeciwnym przypadku, czyli gdy $\lim x_n \notin D_f$, zapis $f(\lim x_n)$ straciłby sens).

Zauważmy, że dla funkcji wykładniczych z ciągłości w zerze wyniknie ciągłość na całej prostej, gdyż $a^{t+h} - a^t = a^t(a^h - 1)$. Na wykładzie pokazuję, jak wykazać to w oparciu o zbieżność ciągu $a^{\frac{1}{n}}$ do 1.

Z warunku Heinego, stosując odpowiednie twierdzenia o granicach ciągów, łatwo otrzymamy następujące własności:

Twierdzenie 19 Elementarne własności funkcji ciągłych

1. *Funkcje stałe są ciągłe. Restrykcje funkcji ciągłych są ciągłe*
2. *Suma, iloczyn i iloraz funkcji ciągłych -są ciągłe (w przypadku ilorazu dotyczy to jego dziedziny: $D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap D(g) \setminus g^{-1}[\{0\}]$).*
3. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*
4. *Ciągłe są funkcje spełniające tzw. warunek Lipschitza:*
$$\exists_{M>0}\forall_{s,t\in D(f)}\ |f(s) - f(t)| \leqslant M|s - t|.$$
5. *Jeśli każdy punkt t z dziedziny $D(f)$ ma otoczenie U takie, że restrykcja $f_{|U}$ jest ciągła w punkcie t, to f jest ciągła.*

Jako ćwiczenie, proponuję sprawdzić, że gdy dziedzina funkcji f jest sumą mnogościową dwu zbiorów A, B, czyli $D(f) = A \cup B$, to z ciągłości obu restrykcji: $f_{|A}$ oraz $f_{|B}$ nie wynika ciągłość f. Jednak gdy pytamy o ciągłość w danym punkcie x_0, to musi być zarówno $x_0 \in A$, jak i $x_0 \in B$. Tym razem wywnioskować ciągłość f w punkcie x_0. z ciągłości $f_{|A}$ oraz $f_{|B}$ w x_0. (Najczęściej mamy do czynienia z przypadkiem $A = [\alpha, x_0], B = [x_0, \beta]$.)

Stosując nierówności typu 1. sformułowane po twierdzeniu 13, można wykazać warunek Lipschitza w otoczeniu każdego z punktów dziedziny funkcji trygonometrycznych, wielomiasnów, funkcji wymiernych, potęgowych. (W przypadku funkcji $\mathbb{R}_+ \ni t \to \sqrt[k]{t}$, $k \in \mathbb{N}$ dla punktu $t = 0$ trzeba rozumować inaczej.) Wkrótce wykażemy też ciągłość funkcji odwrotnych do wymienionych powyżej, co w połączeniu z punktami 2., 3. ostatniego twierdzenia da ciągłość wszystkich funkcji elementarnych na ich naturalnych dziedzinach. Wcześniej poznamy

Twierdzenie 20 Kluczowe własności funkcji ciągłych:

- **Tw. Weierstrassa** *Funkcje ciągłe na przedziałach domkniętych i ograniczonych osiągają wartości: największą oraz najmniejszą. Są więc ograniczone.*

- **Własność Darboux** *Funkcje ciągłe f na przedziałach osiągają wszystkie wartości pośrednie. Innymi słowy, obrazem przedziału musi być cały przedział: gdy $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$, to pomiędzy punktami x_1, x_2 znajdziemy punkt x_0 taki, że $f(x_0) = \gamma$.*

Można wykazać, że $f(z) = \max\{f(t) : t \in [a,b]\}$, gdy z jest granicą dowolnego podciągu zbieżnego w takim ciągu (x_n), że

$$\lim f(x_n) = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\}.$$

Natomiast gdy $\{x_1, x_2\} = \{a, b\}$, przy czym $a < b$, to $f(x_0) - \gamma$ dla

$$x_0 = \sup\{t \in [a,b] : f(t) < \gamma\}.$$

Na wykładzie podaję przykłady wskazujące na konieczność poszczególnych założeń. Na przykład, twierdzenie Weierstrassa nie zachodzi dla funkcji na przedziałach otwartych, bądź nieograniczonych.

Choć może się wydawać, że zachodzenie własności Darboux dla restrykcji f do każdego z przedziałów postaci $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ implikuje ciągłość f w punkcie x_0, to wcale tak nie jest! [Na przykład, gdy $x_0 = 0$, funkcja, dla której $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ spełnia taki warunek, jeśli za $f(0)$ przyjąć dowolną wartość z przedziału $[-1, 1]$. Natomiast granica $\gamma = \lim_{x \to 0} f(x)$ wcale nie istnieje. Faktycznie, stosując warunek Heinego dla ciągu $x_n = \frac{1}{n\pi}$ otrzymamy $\gamma = \lim f(x_n) = 0$, natomiast dla innego ciągu (również zbieżnego do zera) typu $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ otrzymamy sprzeczny wynik: $\gamma = \lim f(y_n) = 1$.]

Dopiero z własności Darboux możemy otrzymać zapowiedziane wcześniej dowody tego, że dziedzinami funkcji odwrotnych do funkcji: trygonometrycznych, potęgowych, wykładniczych -są odpowiednie przedziały, lub półproste, czy też $\mathbb{R}$. Na przykład, aby wykazać, że dla dowolnej liczby $\gamma > 0$ istnieje jej logarytm naturalny, korzystamy z następujących faktów: $e > 1$, $\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty > \gamma$, więc dla pewnego $b \in \mathbb{R}$ jest $\gamma < e^b$. Podobnie, dla pewnego $a < b$ jest $e^a < \gamma$, gdyż $\gamma > 0 = \lim_{t \to -\infty} e^t$. Dla „naszego x_0 jest więc $e^{x_0} = \gamma$. W podobny sposób wykazujemy istnienie $\sqrt[k]{\gamma}$, $\arccos \gamma$ itp.

Innym pożytecznym wnioskiem jest **monotoniczność injekcji ciągłych, których dziedziną jest przedział** (proszę to sprawdzić „metodą rysunkową”). Funkcje odwrotne do monotonicznych są nadal monotoniczne (tego samego typu). Obrazem dziedziny (czyli przeciwdziedziną) funkcji odwrotnej jest dziedzina funkcji odwracanej. Pierwsza teza poniższego twierdzenia wyniknie więc z drugiej:

Twierdzenie 21 *Funkcje odwrotne do funkcji ciągłych określonych na przedziale są ciągłe. Funkcja monotoniczna jest ciągła, gdy jej przeciwdziedziną jest przedział.*

Tu słowo przedział oznacza przedział niekoniecznie domknięty i niekoniecznie ograniczony , np. półprostą typu $(-\infty, a]$, $(b, +\infty)$ lub $\mathbb{R}$. Dla dowodu potrzebne nam będzie pojęcie granic jednostronnych.

4.4 Granice jednostronne

Powiemy, że x_0 jest *prawostronnym punktem skupienia zbioru $D \subset \mathbb{R}$*, gdy jest on punktem skupienia dla zbioru $D \cap (x_0, +\infty)$. Jest to równoważne istnieniu ciągu silnie malejącego o wyrazach w zbiorze D, zbieżnego do x_0, lub równości $x_0 = \inf(D \cap (x_0, +\infty))$. Analogicznie określamy pojęcie lewostronnego punktu skupienia zbioru.

Dla funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$ i punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ będącego prawostronnym punktem skupienia zbioru D_f (dziedziny f) definiujemy *granicę prawostronną funkcji f w punkcie x_0*, oznaczaną jako przez jeden z (równoważnych) symboli:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x), \qquad \text{lub} \quad f(x_0 + 0)$$

jako granicę restrykcji (zawężenia) f do zbioru $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Podkreślmy, że $x_0 + 0$, to nie jest zwykła algebraiczna operacja dodawania, lecz część symbolu. Tak na prawdę, zero symbolizuje tu „nieskończenie mały składnik dodatni”.

Podobnie, $f(x_0-0)$ nie oznacza liczby $f(x_0)$, lecz granicę lewostronną w punkcie x_0. Wówczas x zmierza do x_0 z lewej strony, czyli przy założeniu $x < x_0$.

Na przykład, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, zaś $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

W dalszym ciągu załóżmy, że x_0 jest zarówno lewo - jak i prawo-stronnym punktem skupienia dziedziny funkcji. Łatwo można sprawdzić, że obydwie granice jednostronne istnieją w punkcie x_0 i są równe tej samej wartości $\gamma \in \bar{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje „zwykła" granica $\lim_{x\to x_0} f(x)=\gamma$. Z tego względu, tę ostatnią granicę nazywamy czasami „granicą obustronną" w punkcie x_0. Funkcja jest więc ciągła w takim punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne, przy czym $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Punkt x_0 nazywamy *punktem nieciągłości skokowej (*lub *I typu)*, jeśli istnieją w tym punkcie obydwie granice jednostronne skończone, lecz są one różne. Gdy są one sobie równe i skończone, lecz różne od $f(x_0)$, mówimy o nieciągłości usuwalnej w tym punkcie. (Zmieniając wartość $f(x)$ jedynie w punkcie $x=x_0$ na $f(x_0+0)$ otrzymamy funkcję ciągłą). Gdy któraś z granic jednostronnych nie istnieje, mówimy o nieciągłości drugiego typu. Gdy granica jednostronna (np. prawostronna) istnieje, lecz jest równa $+\infty$, lub$-\infty$, mówimy, że funkcja ma (prawostronną -w tym przypadku) *asymptotę pionową* w punkcie x_0.

Linię o równaniu $x=x_0$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nazwiemy linią asymptoty pionowej, lub po prostu -asymptotą pionową.

Na przykład, funkcja *signum* ma nieciągłość skokową w zerze, zaś jej wartość bezwzględna, $|\mathrm{sgn}(x)|$ ma już tylko nieciągłość usuwalną. Funkcja równa $\sin\frac{1}{x}$ ma nieciągłość drugiego typu, gdyż żadna z granic jednostronnych w zerze nie istnieje. Funkcja $\frac{1}{\sin x}$ ma asymptoty pionowe lewo- i prawostronne w punkcie 0 i w punktach $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Mamy też asymptoty ukośne (lub pochyłe) w $+\infty$ (odpowiednio w $-\infty$) -są to linie o równaniu $y=Ax+B$, gdzie $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $B=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)$. Gdy $A=0$ -mówimy o asymptocie poziomej. Np. linia $x=0$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$ dla funkcji wykładniczej e^x.

Jakie asymptoty mają funkcje $x\cos\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, $\frac{x^3+1}{x^2-4}$?

Następujące twierdzenie daje odpowiedź na pytanie, w jakich punktach funkcja monotoniczna może być nieciągła. Bez zmniejszania ogólności, ograniczyć się można do funkcji niemalejących.

Twierdzenie 22 *Dla funkcji niemalejącej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ istnieją skończone granice lewostronne we wszystkich punktach $x_0\in(a,b]$ i granice prawostronne w punktach przedziału $[a,b)$. Ponadto w takich punktach*

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0), \qquad \text{odpowiednio} \qquad f(x_0)\leqslant f(x_0+0). \tag{4}$$

Mamy też równości

$$f(x_0-0)=\sup\{f(s):\ s\in[a,x_0)\}, \qquad f(x_0+0)=\inf\{f(t):\ t\in(x_0,b]\}. \tag{5}$$

Funkcja monotoniczna może mieć co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości i to wyłącznie I typu (skokowych). Jeśli x_0 jest punktem nieciągłości, to obraz zbioru $[a,b]$ przez f (czyli przeciwdziedzina f nie jest przedziałem -zawiera punkty znajdujące się powyżej oraz poniżej przedziału $(f(x_0-0),f(x_0+0))$, zaś z tym przedziałem ma co najwyżej jeden punkt wspólny (a mianowicie $f(x_0)$).

Teza o skończoności granic jednostronnych przestanie obowiązywać na krańcach dziedziny, jeśli zamiast przedziału domkniętego -rozważać funkcje o dziedzinie typu (a,b). Sprawdzenie równości (5) i sam dowód istnienia granic przebiega niemal identycznie, jak dowód twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych. Nierówności (4) można łatwo wywnioskować ze wzorów (5), używając definicji kresów i monotoniczności f. Ponieważ dla $\alpha,\beta\in[a,b]$ z nierówności $\alpha<x_0$ wynika $f(\alpha)\leqslant f(\alpha+0)\leqslant f(x_0-0)$ i podobnie $x_0<\beta\Rightarrow f(x_0+0)\leqslant f(\beta)$, łatwo uzyskać stąd ostatnią tezę.

Jak już zauważyliśmy, z tego twierdzenia wyniknie ciągłość funkcji odwrotnych do funkcji różnowartościowych ciągłych, określonych na przedziałach.

4.5 Granice o podstawowym znaczeniu

Zestawimy tu najważniejsze granice. Ustalmy liczby $a > 1, b < 1$ oraz $k > 0$. Wówczas

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 = \lim_{x\to+\infty} b^x, \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} a^x.$$

Funkcje te są ciagłe, więc $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Funkcje wykładnicze a^x szybciej rosną, niż funkcje potęgowe w tym sensie, że (dla dowolnie dużych k) mamy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty. \tag{6}$$

Podobnie, ciągłe są funkcje odwrotne: $\log_a x$. Ponadto

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty = \lim_{x\to+\infty} \log_b x, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_b x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \log_a x.$$

Logarytmy $\log_a x$ rosną wolniej, niż funkcje potęgowe:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0. \tag{7}$$

Dla $k = 1$ możemy to wywnioskować np. z ciągłości logarytmu w punkcie 1 i ze zmierzania $x^{\frac{1}{x}}$ do 1 przy $x \to +\infty$ (podobnie, jak $\sqrt[n]{n} \to 1$), gdyż $\frac{\log_a x}{x} = \log_a(x^{\frac{1}{x}})$. Ogólnie, $\frac{\log_a x}{x^k} = \frac{\frac{1}{k}\log_a(x^k)}{x^k}$.

Zauważmy też, że $\lim_{x\to 0+} x^k \log_a x = 0$, co otrzymamy podstawiając $y = \frac{1}{x}$ w ostatniej granicy pamiętając, że $\log_a y = -\log_a x$, $\frac{1}{y^k} = x^k$.

$\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e = 2,71828\ldots$

Granice w zerze (przy $h \to 0$) wyrażeń typu: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. (Są to tzw. pochodne funkcji. Pojęcie to jest jednym z najważniejszych w matematyce i w jej zastosowaniach. W następnych wykładach dowiemy się, jak bardzo ułatwia ono liczenie granic w przypadku symboli nieoznaczonych.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y}, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k. \tag{12}$$

Jak już zauważyliśmy, warunek Heinego jest równoważny definicji granicy i to pozwala przenosić własności granic ciągów na odpowiednie twierdzenia dla granic funkcji -np. z tw. o trzech ciągach otrzymamy tw. o 3 granicach. Stosując to do ostatniej z wypowiedzianych w punkcie 3.1 nierówności, podzielonych stronami przez $\sin x$, czyli do nierówności $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ prawdziwych dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (i dla $-\frac{\pi}{2} < x < 0$), wykazujemy (8). Sprawdzając tu drugą równość pamiętajmy, że arc sin jest ciągła, więc dla $x = \arcsin y$ mamy:
$x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$ oraz $\sin x = y$.

Dla sprawdzenia (9) można skorzystać (dla $\beta = 0$) ze wzoru:
$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ oraz z pierwszej granicy (8).

Przekształcenie użyte przy badaniu granicy (7) dadzą też tezę (10). Ostatnie dwie granice sprowadzimy do poprzednich, jeśli za y przyjmiemy cały licznik, podobnie, jak to zrobiliśmy w przejściu od pierwszej z granic (8) do drugiej.

Dokładniej, w ostatniej granicy , dla $y = (1+x)^k - 1$, mamy $(1+x)^k = 1 + y$, co logarytmując stronami, otrzymamy $k\ln(1+x) = \ln(1+y)$, więc

$\frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(y+1)} \cdot \frac{\ln(y+1)}{x} = \frac{y}{\ln(y+1)} \cdot k \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$, co zmierza do k.
Na zakończenie przyjrzyjmy się dwu z pozoru trudnym granicom:
$I_1 = \lim_{x\to 0+} x^{\sin x}, \quad I_2 = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{(\frac{1}{x^2})}$. Sprawdzimy, że $I_1 = 1, I_2 = \sqrt{e}$. Zapisując te granice w postaci $I_j = \lim_{x\to 0+} \exp(h_j(x))$ będziemy wykorzystywać ciągłość funkcji wykładniczej i wystarczy zbadać granice w zerze (jedno, lub odp. -dwustronną) z funkcji h_j. Tu $h_1(x) = \ln x \sin x = x \ln x \cdot \frac{\sin x}{x}$. Ostatni czynnik zmierza do 1 -dzieki (8), pierwszy -jak już widzieliśmy, dąży do zera. Stąd $I_1 = e^0 = 1$. Natomiast zapisując (10) w postaci $\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{1-y} = 1$, dla $y = \cos x$ mamy $h_2(x) = x^{-2} \ln(\cos x) = \frac{1-y}{x^2} \frac{\ln y}{1-y} \to \frac{1}{2}$ przy $x \to 0$, dzięki (9)

5 Pochodna funkcji w punkcie

(Uzupełnienia do wykładu z 17/18 XI 2009)

5.1 Motywacja, przykłady

Jednym z podstawowych zadań jest opis zmian, pozwalający na przybliżone (lub dokładne) szacowanie ich wielkości. Możemy dla uproszczenia przyjąć, że zmienna niezależna $t \in (a; b)$ reprezentuje czas, $y = y(t)$ -położenie jakiegoś punktu na drodze w chwili t. Dalej upraszczając, przyjmijmy, że punkt porusza się po prostej, położenie jest współrzędną punktu na tej prostej.

Od chwili $t_0 \in (a, b)$ do chwili $t_1 = t_0 + \Delta t$ upływa Δt jednostek czasu (np. sekund) i dokonuje się przemieszczenie o $\Delta y := y(t_1) - y(t_0)$ jednostek długości (np. metrów). Średnia prędkość przemieszczenia, oznaczmy ją V_{01} to wielkość

$$V_{01} := \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

(tu mierzona w metrach na sekundę). Gdyby był to ruch ze stałą prędkością, położenie, powiedzmy $S^*(t)$ w chwili dowolnej t dane byłoby wzorem

$$S^*(t) = y(t_0) + V_{01}(t - t_0)$$

Wykresem funkcji S^* jest prosta przechodząca przez punkty o współrzędnych $(t_0; y(t_0))$ oraz $(t_1; y(t_1))$, czyli tzw. sieczna wykresu funkcji y w tych dwu punktach. Jej współczynnik kierunkowy wynosi V_{01}. Jeśli jednak prędkość podczas ruchu nie jest stała, pomiar prędkości średniej będzie dawał różne wyniki w zależności od położenia punktu t_1.

Prędkość chwilową $V(t_0)$ *w punkcie* t_0 definiujemy jako granicę, o ile istnieje, z prędkości średnich V_{01} na odcinkach $(t_0; t_1)$ przy t_1 zmierzających do t_0, czyli przy $\Delta t \to 0$. Przypomnijmy, oznacza to, że gdy dowolnie zadamy sobie „poziom dokładności" $\epsilon > 0$, to ma istnieć $\delta > 0$ takie, by z nierówności $0 < |t_0 - t_1| < \delta$ wynikało, że prędkość chwilowa V_{01} nie różni się od $V(t_0)$ o więcej, niż ϵ (należy do przedziału $(V(t_0) - \epsilon; V(t_0) + \epsilon)$. Wszystkie takie sieczne przechodzą przez punkt $(t_0; y(t_0))$, kąty ich nachylenia do osi $0t$ obliczamy jako $\mathrm{arctg}(V_{01})$, więc dzięki ciągłości funkcji arctg, te kąty zmierzają do $\mathrm{arctg}(V(t_0))$. Granicznym położeniem siecznych jest więc prosta o równaniu $S_0(t) = y(t_0) + V(t_0)(t - t_0)$, zwana *styczną do wykresu funkcji* y *w tym punkcie* $(t_0; y(t_0))$. Jej współczynnikiem kierunkowym jest $V(t_0)$. (Zauważmy, że wystarczy rozważać wartości $|t_1 - t_0| < \delta$ dostatecznie małe. Wówczas dzięki otwartości przedziału $(a; b)$, punkt t_1 będzie należał do dziedziny funkcji y -wystarczy, by $\delta < \min\{b - t_0, t_0 - a\}$.)

Na przykład, niech $t_0 = 0, a = -1, b = 1$ i niech $y(t) = 5 + 3t^2$. Wtedy $\Delta y = 5 + 3t_1^2 - 5, \Delta t = t_1$, więc średnia prędkość na odcinku $(0, t_1)$, to liczba $V_{01} = \frac{3t_1^2}{t_1} = 3t_1$, zmierza ona do zera. Dla innego t_0 będzie $\Delta y = 5 + 3t_1^2 - 5 - 3t_0^2 = 3(t_1^2 - 3t_0^2) = 3\Delta t(t_1 + t_0)$, więc po podzieleniu przez Δt otrzymamy $V_{01} = 3(t_1 + t_0)$, co zmierza do $6t_0$ przy $t_1 \to t_0$.

Z kolei, gdy $y(t) = |t|, t_0 = 0$, prędkości średnie (równe -1 dla $t_1 < 0$ oraz +1 dla $t_1 > 0$) nie mają granicy przy $t_1 \to 0$. Trudno wyobrazić sobie taki ruch cząstki o niezerowej masie, ale ruch promienia światła (fotonu) odbijającego się od zwierciadła -już prędzej...

Gdy $y(t) = \sqrt[3]{t}, t_0 = 0$, prędkości średnie wynoszą $(t_1^{-\frac{1}{3}})^2$ i zmierzają do $+\infty$ przy $t_1 \to 0$. Tu styczną (w zerze) jest prosta pionowa $\{(0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Pozostaniemy przy ogólnych funkcjach (zamiast y oznacznych literami $f, g, ...$). Wartość $\Delta t = t_1 - t_0$ nazwiemy *przyrostem argumentu,* zaś $\Delta f := f(t_1) - f(t_0)$ -*przyrostem wartości funkcji.* Ich stosunek nazwiemy *ilorazem różnicowym* (w punktach t_0, t_1). Możemy ten iloraz nadal interpretować jako współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji f. Sieczna ta jest prostą przechodzącą przez punkty $(t_0; f(t_0))$ oraz $(t_1; f(t_1))$.

Zamiast t_1 możemy pisać $t_0 + \Delta t$. Wówczas $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$. Często zamiast Δt piszemy h. Wtedy $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$.

5.2 Definicja pochodnej, różniczkowalność

Załóżmy, że punkt t_0 należy do wnętrza przedziału otwartego zawartego w dziedzinie funkcji f. Mówimy, że f *jest różniczkowalna w punkcie* t_0, (oznaczając ten fakt zapisem $t_0 \in D(f')$), jeśli istnieje granica

$$f'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Granicę tę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie* t_0. Zamiast $f'(t_0)$ używamy też innych oznaczeń dla pochodnej: $f'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)|_{t=t_0}$. Jeśli każdemu z punktów $t \in D(f')$ przypiszemy wartość $f'(t)$, otrzymamy funkcję $f' : D(f') \to \mathbb{R}$, zwaną *funkcją pochodną z funkcji* f, lub krócej: pochodną z f.

Może się zdarzyć, że w punkcie t_0 istnieje tylko granica jednostronna z ilorazów różnicowych. Mówimy wówczas o pochodnej lewostronnej (odpowiednio -prawostronnej) i oznaczamy je symbolami $f'_-(t_0)$ (odpow. $f'_+(t_0)$).

Na przykład, jak już zauważyliśmy, funkcją pochodną dla modułu jest restrykcja funkcji *signum* do $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tu zamiast pisać $f(t) = |t|, f'(t) = \mathrm{sgn}(t)$ dla $t \neq 0$, wygodniej jest napisać $\frac{d}{dt}(|t|) = \mathrm{sgn} t$. W punkcie $t = 0$ granice jednostronne ilorazów różnicowych istnieją, lecz są różne.

Podobnie, $\frac{d}{dt}(\sqrt[2]{t})|_{t=t_0} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}$.

Aby sprawdzić ostatnią równość, dzielimy i mnożymy różnicę liczb $\sqrt{t_1}$ oraz $\sqrt{t_0}$ przez ich sumę. W liczniku dostaniemy $(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0})(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_0}) = t_1 - t_0$, co zredukuje się z mianownikiem ilorazu różnicowego. Tak więc mamy $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_0}}$ i te ilorazy różnicowe dążą przy $t_1 \to t_0$ do granicy równej $\frac{1}{2\sqrt{t_0}}$ $(\forall_{t_0 > 0})$.

Pochodne niektórych funkcji elementarnych (funkcje t^n, a^t, $\sin t$, $\cos t$) można znaleźć bezpośrednio z definicji, przy wykorzystaniu odpowiednich przekształceń dla różnic wartości tych funkcji i korzystając z granic typu (11), (8). Na wykładzie wykazałem, że (dla $n \in \mathbb{N}$) mamy

$$(t^n)' = nt^{n-1} \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = -\sin t. \tag{13}$$

Rzecz jasna, pochodna z funkcji stałej jest zawsze (w każdym punkcie) równa zeru.

Dla wyliczenia dalszych pochodnych niezbędne są pewne ogólne twierdzenia i własności. Najważniejsze z nich zbierzemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 23 *Przypuśćmy, że funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie t_0. wówczas*

1. *Funkcje te są ciągłe w t_0, czyli z różniczkowalności wynika ciągłość.*

2. *Funkcja $f + g$ jest różniczkowalna w t_0 oraz $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.*

3. *Funkcja $f \cdot g$ jest różniczkowalna w t_0, $(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$. Wzór ten (na pochodną iloczynu) nazywany jest wzorem Leibniza.*

4. *Gdy ponadto $g(t_0) \neq 0$, to istnieje pochodna ilorazu, przy czym $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Twierdzenie 24 *Złożenie $g \circ f$ funkcji f różniczkowalnej w punkcie x_0 z funkcją g różniczkowalną w punkcie $f(x_0)$ jest różniczkowalne w punkcie x_0, przy czym $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. (=tzw. „Reguła łańcucha")*

Na przykład, $(a^{\sin t})' = a^{\sin t} \ln a \cos t$. Funkcja $a^{\sin t}$ zmiennej t jest bowiem złożeniem funkcji (wewnętrznej) $x = \sin t$ oraz funkcji $y = a^x$ („zewnętrznej"), więc pochodna takiego złożenia, to iloczyn pochodnej funkcji zewnętrznej (liczonej w punkcie $\sin t$) i pochodnej funkcji wewnętrznej (w punkcie t). Podobnie, $(\sqrt{e^x + x^2 + 1})' = \frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2+1}}$. Ostatni ze wzorów zawiera się w następującym twierdzeniu o różniczkowaniu funkcji odwrotnej.

Twierdzenie 25 *Gdy funkcja f jest odwracalna oraz $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna: f^{-1} ma pochodną w punkcie $y_0 := f(x_0)$, przy czym*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad \left(\text{czyli} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\right).$$

Na przykład, $\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$, więc $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Ale dla $-1 < x < 1$ mamy $t := \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i wówczas $0 < \cos t (= \sqrt{1 - \sin^2 t})$, więc możemy stosować twiewrdzenie 25, otrzymując

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Podobnie

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \mathrm{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Natomiast

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Teraz dla dowolnego wykładnika $r \in \mathbb{R}$ możemy sprawdzić, że pochodną funkcji potęgowej x^r jest rx^{r-1} (tak, jak w przypadku $r \in \mathbb{N}$.) Faktycznie, nasza funkcja jest złożeniem $x^r = \exp(r \ln x)$. Stosując trzy powyższe twierdzenia możemy więc znaleźć pochodną dla wszystkich funkcji elementarnych.

Można ustalić pewną klasyfikację funkcji elementarnych ze względu na „stopień skomplikowania". Najprostszą klasę funkcji stanowią wielomiany p (im wyższy stopień, $\deg(p)$, tym bardziej wielomian jest skomplikowany). Pochodna wielomianu jest nadal wielomianem, zaś $\deg(p') = \max(\deg(p) - 1, 0)$.

Następnie mamy klasę funkcji, przypisujących zmiennej x iloraz $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gdzie p, q są wielomianami, zaś $\exists x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0$. Dziedzininą r jest $\mathbb{R} \setminus q^{-1}\{0\}$. Takie funkcje nazywamy *funkcjami wymiernymi.* Funkcja pochodna r' jest również wymierna, dziedzina r' nie jest mniejsza, niż dziedzina r. Wynika to z twierdzenia 23. 4).

Pochodne z funkcji wykładniczych są funkcjami wykładniczymi (pomnożonymi przez stałe), podobnie jest dla funkcji potęgowych.

Pochodne z funkcji trygonometrycznych (sin, cos, tangens, ctg) są postaci $r(\sin x)$, gdzie r jest funkcją wymierną. (W przypadu pierwszych dwu funkcji, postać pochodnej jest jeszcze prostsza).

Natomiast zarówno pochodne funkcji logarytmicznej, jak i funkcji arc tg , arc ctg -są funkcjami wymiernymi. To „uproszczenie" spowoduje komplikacje, gdy odwrócimy procedurę i będziemy szukać takiej funkcji różniczkowalnej F, dla której pochodna jest daną funkcją f. Wówczas dla niektórych funkcji wymiernych f funkcja F, którą nazwiemy *całką nieoznaczoną* z f nie będzie już wymierna. Do zagadnień tych dojdziemy pod koniec semestru.

6 Zastosowania twierdzeń o wartości średniej (24 XI 2009)

6.1 Ekstrema lokalne, monotoniczność

Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$, gdy w pewnym otoczeniu punktu x_0 wartości są mniejsze lub równe $f(x_0)$, czyli gdy

$$\exists\delta > 0 \forall_{x\in(a,b)} |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

Jeśli dodatkowo $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, mówimy o istotnym maksimum lokalnym w tym punkcie x_0. (Analogicznie definiujemy minimum lokalne. Zwróćmy uwagę, że funkcja może nie mieć ekstremum lokalnego), lub może mieć (nawet nieskończenie) wiele takich ekstremów. (np. $\sin \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, 1)$). W przypadku maksimum lokalnego ilorazy różnicowe, równe $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ mają licznik nieujemy, więc są $\geqslant 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $\leqslant 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Z twierdzenia o zachowaniu słabych nierówności po przejściu do granicy, mamy wówczas $f'_-(x_0) \geqslant 0$ oraz $f'_+(x_0) \leqslant 0$, jeśli pochodne jednostronne istnieją. (Również w przypadku minimum lokalnego, $\mathrm{sgn}(f'_-(x_0)) = -\mathrm{sgn}(f'_+(x_0))$.) Gdy f jest różniczkowalna w punkcie x_0, te granice jednostronne muszą być równe pochodnej. Wynika stąd bardzo ważne Twierdzenie Fermata:

Twierdzenie 26 *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie ekstremum lokalnego, to pochodna w tym punkcie musi być równa zero.*

Wiadomo już, w jakich punktach należy szukać ekstremów lokalnych. Ale nie jest to warunek wystarczający -np. funkcja $f(t) = t^3$ spełnia w punkcie $t_0 = 0$ warunek $f'(0) = 0$, lecz w 0 nie ma ekstremum lokalnego -w każdym otoczeniu przyjmuje zarówno wartości silnie większe od $f(0) = 0$, jak i < 0.

Twierdzenie 27 (Rolle'a) *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b), to z równości $f(a) = f(b)$ wynika istnienie punktu $x_0 \in (a, b)$, w którym $f'(x_0) = 0$.*

(Dowód wynika z dwu twierdzeń: z tw. Weierstrassa (20) funkcja osiąga w $[a, b]$ zarówno maksimum jak i minimum. Jeśli f nie jest stała, to albo wartość największa, albo najmniejsza osiągnięta jest w punkcie wewnętrznym przedziału. Teza wyniknie z tw. Rolle'a.)

Twierdzenie 28 (Lagrange'a) *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje punkt $x_0 \in (a, b)$, w którym $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Geometrycznie możemy to wyrazić mówiąc, że styczna w pewnym punkcie z przedziału otwartego jest równoległa do siecznej wykresu f odpowiadającej końcom tego przedziału. Po odjęciu od f funkcji liniowej, której współczynnik kierunkowy jest tym ilorazem różnicowym, otrzymujemy tzw. „funkcję pomocniczą" $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ spełniającą wszystkie założenia tw. Rolle'a. Z równości $h'(x_0) = 0$ wynika nasza teza.

Twierdzenie to ma bardzo liczne zastosowania, jest jednym z najważniejszych w rachunku różniczkowym. Na przykład, wynika stąd następujący

Wniosek 29 *Funkcja różniczkowalna na przedziale otwartym jest: stała (odpowiednio niemalejąca, nierosnąca) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest: równa zero (odp. $\geqslant 0$, $\leqslant 0$) w każdym punkcie tego przedziału. Natomiast mamy implikacje: $(\forall_{t\in(a,b)} f'(t) \neq 0) \Rightarrow f$ jest różnowartościowa;*
$(\forall_{t\in(a,b)} f'(t) > 0) \Rightarrow f$ jest silnie rosnąca; (analogicznie dla f malejących.

Wniosek 30 *Jeśli f' zmienia znak w punkcie x_0, tzn. $f'(x_0) = 0$ oraz $\exists_{\delta>0}(x_0 - \delta < s < x_0 < t < x_0 + \delta) \Rightarrow \mathrm{sgn}(f'(s)f'(t)) < 0$, to f ma istotne ekstremum lokalne w punkcie x_0.*

Ostatni warunek oznacza, że znak f' w całym przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ jest stały, różny od zera i od znaku f' w całym przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$. Można nawet wykazać, że pochodna, choć nie musi być ciągła, ma własność Darboux osiągania wszystkich wartości pośrednich (por.tw. 20).

Zobaczmy na przykładzie funkcji $f(x) = xe^{1-2x^2}$, jak to działa: Funkcja jest nieparzysta i ma asymptotę poziomą $y = 0$ w $\pm\infty$, jedynym miejscem zerowym jest $x = 0$. Ponieważ $f'(x) = (1-4x^2)e^{1-2x^2}$, znak drugiej pochodnej pokrywa się ze znakiem funkcji $y = 1 - 4x^2 = (1-2x)(1+2x)$ i wynosi 0 w punktach $\pm\frac{1}{2}$, jest > 0 dokładnie dla $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. W punktach $\pm\frac{1}{2}$ pochodna zmienia znak. Stąd f jest silnie malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz $(\frac{1}{2}, +\infty)$. W przedziale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ funkcja silnie rośnie. zaś w punkcie $-\frac{1}{2}$ ma nie tylko minimum lokalne, ale i wartość najmniejszą. Podobnie, $f(\frac{1}{2}) > f(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. (Można tę metodę stosować nawet do badania monotoniczności ciągów typu $f(n)$)

Dzięki twierdzeniu Lagrange'a możemy też oceniać błąd obliczeń przybliżonych. Przypuśćmy, że wartość x jest podana z dokładnością do $\frac{1}{27}$. Jak wpłynie to na odczyt wartości funkcji $f(x)$ -na przykład dla $f(x) = 55 + 3\mathrm{arctg}x$? Faktyczną wartością jest więc nie x, lecz $x + h$. gdzie h reprezentuje błąd „danych wejściowych”. Tu $|h| \leqslant \frac{1}{27}$. Z twierdzenia Lagrange'a, istnieje punkt (leżący pomiędzy punktami x oraz $x+h$, czyli punkt postaci $x+\theta h$ dla pewnego $\theta \in (0,1)$ taki, że $f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Stąd

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |h| \cdot \sup_{\theta \in (0,1)} |f'(x+\theta h)|. \tag{14}$$

Jeśli moduł pochodnej na odcinku pomiędzy x a $x + h$ nie przekracza stałej M, to nasz błąd wynikowy szacujemy z nierówności $|f(x+h) - f(x)| \leqslant |h|M$. W naszym przypadku $f'(x) = \frac{3}{1+x^2}$, możemy więc przyjąć $M = 3$, otrzymamy błąd nie większy od $\frac{1}{9}$.

6.2 Reguła de l'Hospitala

Z pewnego uogólnienia twierdzenia Lagrange'a wynika metoda (bardzo skuteczna!) liczenia granic w przypadku symboli nieoznaczonych:

Twierdzenie 31 (Reguła de l'Hospitala) *Jeśli* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \{0, -\infty, +\infty\}$ *oraz* $\exists_{\delta>0} 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow g'(x) \neq 0$, *to z istnienia granicy* $\alpha = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(tu* $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$*) wynika, że istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. *Analogiczna teza zachodzi dla granic jednostronnych i dla granic przy* $x \to -\infty$ *lub przy* $x \to +\infty$.

Trzeba koniecznie podkreślić, że nie można tej reguły stosować dla granic właściwych (np. dla $x_0 = 0, f(x) = x + 3, g(x) = x + 5$ iloraz $\frac{f}{g}$ zmierza przy $x \to 0$ do $\frac{3}{5}$, iloraz pochodnych jest równy stale 1. Również nie ma implikacji odwrotnej: z istnienia granicy $\frac{f}{g}$ w danym punkcie nie wynika istnienie granicy ilorazu pochodnych (np. dla $x_0 = 0, f(x) = x \sin\frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{|x|}$. Dla granic w $+\infty$ mamy $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1$, podczas gdy granica ilorazu pochodnych nie istnieje). Jest jeszcze jedno, „etyczne” ograniczenie: reguły de l'Hospitala nie powinniśmy stosować do granic, które służyły nam do wykazania różniczkowalności funkcji elementarnych: sinus oraz funkcji wykładniczej, czyli do granic w zerze z ilorazów typu: $\frac{sinx}{x}$, $\frac{a^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Gdy mianownik jest równy $x - a$, zaś licznik zmierza do zera przy $x \to a$, przejście do pochodnych bardzo upraszcza znajdywanie granic -pozostaje znaleźć granicę pochodnej licznika. Gdy w mianowniku mamy $(x-a)^2$, po jednokrotnym zastosowaniu reguły otrzymamy na ogół znów symbol nieoznaczony typu $\frac{0}{0}$, wówczas możemy procedurę powtórzyć. Liczymy więc „pochodną z pochodnej” -czyli tzw. pochodną drugiego rzędu. Warto sprawdzić, jak działa to w przypadku liczenia $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. Pochondne wyższych rzędów omówimy w następnym wykładzie.

Inne wyrażenia nieoznaczone można sprowadzić do wyrażeń typu występującego w regule de l'Hospitala. Na przykład, $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$. Gdy $f(x)^{g(x)}$ jest typu 1^∞, możemy przekształcić $f^g = \exp(\ln f \cdot g)$ -gdzie wykładnik jest już typu $0 \cdot \infty$. Podobnie przekształcamy wyrażenia typu 0^0. Natomiast $\infty - \infty$ przekształcamy do postaci $\frac{0}{0}$ pisząc $f - g = \frac{1}{f^{-1}} - \frac{1}{g^{-1}} = \frac{g^{-1}-f^{-1}}{f^{-1}g^{-1}}$. Ostatnie wyrażenie jest już typu $\frac{0}{0}$. Na wykładzie pokazałem, jak stosując regułę de l'Hospitala znaleźć granice typu:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}, \quad \lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}, \quad \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+}\big(\frac{\sin x}{x}\big)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^k}{x}.$$

7 Pochodne rzędu n, wielomian Taylora

Już stosując regułę de l'Hospitala spotykamy się niejednokrotnie z potrzebą jej ponownego użycia. W wielu zagadnieniach ważną rolę odgrywa pochodna z funkcji pochodnej, czyli pochodna drugiego rzędu z funkcji f (zmiennej x), oznaczana symbolem f'' lub $\frac{d^2}{dx^2}f$. Przykładem może być przyśpieszenie -pochodna z prędkości chwilowej. Z pewnych względów wygodnie jest zdefiniować pochodną rzędu zero, oznaczaną $f^{(0)}$ jako samą funkcję f. Pochodną rzędu pierwszego -zamiast f' będziemy oznaczać symbolem $f^{(1)}$ lub $\frac{d}{dx}f$.

Definicja 5 *Pochodną rzędu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy rekurencyjnie, jako równą f w przypadku $n = 0$ oraz jako pochodną z funkcji $f^{(n-1)}$, gdy $n \in \mathbb{N}$. Zapisując symbolicznie, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, czyli $\frac{d^n}{dx^n}f = \frac{d}{dx}\big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f\big)$.*

Podobnie, jak w przypadku $n = 1$, czyli „zwykłej pochodnej" -najpierw określamy ją w jednym konkretnym punkcie, by później rozważać ją jako funkcję przypisującą punktowi x_0 wartość pochodnej rzędu n w tym punkcie.

Zarówno funkcja f, jak i jej pochodne rzędów $1, 2, \ldots n-1$ muszą istnieć (być określone) w pewnym otoczeniu tego punktu. Wyjątek stanowią krańce przedziału będącego dziedziną f -tam rozważamy jedynie pochodne jednostronne. Jeśli pochodne rzędu n dla funkcji f są ciągłe w przedziale (a, b), to mówimy, że ta funkcja *jest klasy C^n w tym przedziale*, co zapisujemy symbolicznie w postaci: $f \in C^n(a, b)$. Analogicznie, $f \in C^n[a, b]$ oznacza, że $f \in C^n(a, b)$, zaś w krańcach przedziału n-te pochodne jednostronne istnieją i są równe granicom: prawostronnej -w punkcie a (odp. lewostronnej -w b) z n- tych pochodnych $f^{(n)}(x)$ przy $x \to a^+$ (odpowiednio przy $x \to b^-$). Jeśli pochodne dowolnych stopni istnieją w (a, b), to mówimy, że *f jest klasy C^∞*, zapis: $f \in C^\infty(a, b)$. Większość funkcji elementarnych jest klasy C^∞ na swoich naturalnych dziedzinach. Funkcja $f(x) = x^2\mathrm{sgn}(x)$ ma pierwszą pochodną równą $|x|$. więc jest klasy C^1 w zbiorze $\mathbb{R}$, choć nie jest klasy C^2, bo nie ma drugiej pochodnej w zerze.

Wzory na pochodne n-tego rzędu mają prostą postać jedynie w paru przypadkach. Za każdym razem dowodzimy je metodą indukcji. Oto „niezbędny zestaw":

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (cf)^{(n)} = cf^{(n)}, \text{ gdy } c = \text{stała}, \tag{15}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}, \tag{16}$$

$$(a^x)^{(n)} = (\log_a x)^n a^x, \;\; (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \;\; (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \tag{17}$$

$$\big(x^k\big)^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} \text{ dla } k \geqslant n \text{ oraz } \big(x^k\big)^{(n)} = 0 \text{ dla } k < n, k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Zauważmy, że w ostatnim wzorze $\frac{k!}{(k-n)!} = k(k-1)\cdots(k+1-n)$.

Wniosek 32 *Wartość n-tej pochodnej z funkcji $(x - x_0)^k$ w punkcie x_0 jest, w szczególności, równa $k!$ dla $k = n$ oraz równa zero dla $k \neq n$.*

Pochodna dowolnego rzędu z funkcji wykładniczej e^x jest tą samą funkcją. Pochodna rzędu n z wielomianu $w(x)$ jest nadal wielomianem (ale stopnia niższego o n). Można wykazać (korzystając jedynie z twierdzenia Lagrange'a

28), że pochodna rzędu n z funkcji jest wtedy i tylko wtedy stale równa 0, gdy funkcja ta jest wielomianem stopnia mniejszego od n.

Z wniosku 32 wynika, że dla ustalonego n oraz punktu x_0 można dla danej funkcji f dobrać dokładnie jeden wielomian w stopnia co najwyżej n taki, że $f(x_0) = w(x_0),\ f'(x_0) = w'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = w^{(n)}(x_0)$. Wystarczy przyjąć

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Ten wielomian nazywamy *wielomianem Taylora rzędu n dla funkcji f w punkcie x_0*. Będziemy oznaczać go symbolem $T_{n,x_0} f$. Tak więc $(T_{n,x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$. Trzeba podkreślić, że nie musi to być wielomian stopnia n. Na przykład, gdy $x_0 = 0$, to $(T_{6,0} \sin)(x) = (T_{5,0} \sin)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, gdyż $\sin(0) = \sin''(0) = \sin^{(4)}(0) = \sin^{(6)}(0) = 0$, zaś $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Podobnie, $(T_{5,0} \cos)(x) = (T_{4,0} \cos)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

Szczególnie prosto jest w punkcie 0 dla funkcji $\exp : \mathbb{R} \ni x \to e^x \in \mathbb{R}$. Tutaj $(T_{n,0} \exp)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

Dla funkcji logarytmicznej najlepiej jest przyjąć $x_0 = 1$. Mamy

$$(T_{n,1} \ln)(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Gdy zamiast 0 przyjąć dowolną wartość $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$(T_{n,\alpha} \sin)(x) = \sin\alpha + (x-\alpha)\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{\sin(\alpha + \frac{n\pi}{2})}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Pytanie, co stanie się po przejściu do granicy przy $n \to \infty$, jest bardzo trudne, lecz ma doniosłe znaczenie w zastosowaniach teorii funkcji. Zmierzymy się z tym problemem w następnym semestrze. Teraz rozstrzygniemy inne, nieco prostsze zagadnienie (zależność od x przy ustalonym n różnicy $f - T_{n,x_0} f$, zwanej *resztą we wzorze Taylora*).

Twierdzenie 33 (Wzór Taylora z resztą postaci Lagrange'a) *Gdy $f \in C^n[x_0, x_0 + h]$ oraz $f^{(n+1)}$ istnieje we wszystkich punktach odcinka otwartego $(x_0, x_0+h) = \{x_0 + th : 0 < t < 1\}$, to istnieje pewien punkt $x_0 + \theta h$, gdzie $\theta \in (0, 1)$ taki, że*

$$f(x_0 + h) - (T_{n,x_0} f)(x_0 + h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1}.$$

Wyrażenie po lewej stronie ostatniej równości nazywa się resztą we wzorze Taylora z n-tą pochodną. Innymi słowy,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R,$$

gdzie reszta $R = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1}$.

Reszta wygląda prawie jak następny ($n+1$-szy) wyraz wielomianu Taylora z tą różnicą, że pochodna rzędu $n+1$ zamiast w punkcie x_0, brana jest w punkcie pośrednim pomiędzy x_0 oraz $x_0 + h$. Często zamiast $x_0 + h$ piszemy x, wówczas w miejsce h musimy wstawić przyrost: $x - x_0$.

Inną ważną wła sność reszty R odkrył matematyk włoski, Giuseppe Peano: Wykazał on (przy jedynym założeniu: $f \in C^n[x_0, x_0 + h]$), że

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Zauważmy, że R, to funkcja zmiennej x, przy czym wszystkie jej pochodne $R^{(k)}(x_0)$ rzędu $k = 0, 1, \ldots, n$ są w punkcie x_0 równe zero. Wystarczy wykazać, że teza twierdzenia Peana zachodzi dla tego typu funkcji R. Funkcja R' ma zerowe pochodne rzędu $k \leqslant n-1$. Gdy dowodzimy twierdzenia Peana metodą indukcji względem n dla $n = 1$ wystarczy skorzystać z definicji pochodnej. Natomiast wykonując krok indukcyjny („$n-1 \to n$”), korzystamy z reguły de l'Hospitala. Badana granica jest symbolem typu $\frac{0}{0}$. Pochodna z $(x-x_0)^n$ jest równa $n(x-x_0)^{n-1}$, zaś R' spełnia warunki hipotezy rekurencyjnej, stąd wynika nasze twierdzenie.

Zastosujmy to twierdzenie do badania ekstremów lokalnych. Przypuśćmy, że funkcja klasy C^2 w otoczeniu x_0 spełnia w punkcie x_0 warunek konieczny dla istnienia ekstremum lokalnego, czyli warunek: $f'(x_0) = 0$. Jeśli $f''(x_0) \neq 0$, to wykażemy, że f ma ekstremum lokalne, przy czym jest to istotne minimum lokalne, gdy $f''(x_0) > 0$ (maksimum, gdy $f''(x_0) < 0$). Faktycznie, wzór Taylora z drugą różniczką ma tu postać $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + g(x)(x-x_0)^2$, gdzie $g(x) = \frac{R}{(x-x_0)^2}$, więc $g(x) \to 0$ przy $x \to x_0$. Stąd

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2\left[\frac{1}{2!}f''(x_0) + g(x)\right].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym zmierza do $\frac{1}{2!}f''(x_0)$, więc z twierdzenia o zachowaniu nierówności (Tw.17, s.18), dla pewnego $\delta > 0$ znak tego wyrażenia dla $0 < |x-x_0| < \delta$ jest taki sam, jak znak $f''(x_0)$. Dla takich x jest też $(x-x_0)^2 > 0$, stąd jest to też taki sam znak, jak znak różnicy $f(x) - f(x_0)$. Mamy więc odpowiednie ekstremum lokalne.

Gdy $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, zaś $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, analogiczne rozwinięcie dla $f(x) - f(x_0)$ (w nawiasie kwadratowym $\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + g(x)$,-czynnik stałego znaku a przed nim $(x-x_0)^n$) pokazuje, że gdy n jest parzyste, istnieje ekstremum lokalne (minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$), zaś nie ma ekstremum, gdy n jest liczbą nieparzystą.

8 Funkcje wypukłe i wklęsłe

Na koniec poznajmy zastosowanie drugiej pochodnej do badania wypukłości funkcji. Będziemy tu rozważać jedynie funkcje określone na przedziałach. Zauważmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem , gdy dla dowolnej pary punktów $a, b \in D$ również cały odcinek o końcach a, b, czyli zbiór $\{a+t(b-a) : t \in [0,1]\}$ zawiera się w zbiorze D. Gdy cięciwa łącząca punkty na wykresie funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ leży nad wykresem, to mówimy, że funkcja ta jest wypukła. Odpowiada to nierównościom:

$$f(a) + t(f(b) - f(a)) \geqslant f(a + t(b-a)) \qquad \forall a, b \in D,\, t \in (0,1). \tag{19}$$

Jeśli nierówności (19) są ostre, mówimy o funkcji ścisle wypukłej. Gdy $-f$ jest wypukła, to mówimy, że f jest wklęsła. Kierunki mogą się mylić, więc zapamiętajmy: funkcja exp jest wypukła. Mamy bowiem następujące kryterium.

Twierdzenie 34 *Funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca. Gdy istnieje druga pochodna, to warunek ten jest równoważny jej nieujemności. Gdy $f''(x) > 0$ dla $x \in D$, to f jest ściśle wypukłą w zbiorze D.*

Jedyne funkcje, które są równocześnie wypukłe i wklęsłe, to wielomiany stopnia $\leqslant 1$, czyli funkcje postaci $f(x) = Ax + B$. Wtedy bowiem wykres pokrywa się (na przedziałach typu $[a,b]$) z każdą jego sieczną.

Warunek (19) Można zapisać równoważnie jako pewną nierówność dla ilorazów różnicowych. Niech $x_0 = a < b = x_1, x_t := x_0 + t(x_1 - x_0)$ oraz $y_t = f(x_t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy (19) jest nierównością: $y_0 + t(y_1 - y_0) \geqslant y_t$, czyli $t(y_1 - y_0) \geqslant y_t - y_0$. Możemy tę nierówność podzielić stronami przez $t(x_1 - x_0)$ $(= x_t - x_0)$, gdy $0 < t < 1$, otrzymując nierówność dla ilorazów różnicowych:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \geqslant \frac{y_t - y_0}{x_t - x_0}, \tag{20}$$

ponieważ $x_t - x_0 = x_0 + t(x_1 - x_0) - x_0$. Jeśli oznaczyć $I_{s,t} := \frac{y_s - y_t}{x_s - x_t}$, to (20) mówi, że $I_{0,1} \geqslant I_{t,0}$. Stąd wnioskujemy, że w taka nierówność jest równoważna nierówności

$$I_{t,1} \geqslant I_{0,t}. \tag{21}$$

W tym celu wystarczy zauważyć, że $tI_{0,t} + (1-t)I_{t,1} = I_{0,1}$, więc zawsze $I_{0,1}$ leży na osi liczbowej pomiędzy $I_{0,t}$ oraz $I_{t,1}$. Gdy $f'' \geqslant 0$, to f' jest niemalejąca, zaś z twierdzenia Lagrange'a istnieją s, r takie, że $0 < s < t < r < 1$ oraz $I_{0,t} = f'(x_s)$, $I_{t,1} = f'(x_r)$. Z założenia $f'' \geqslant 0$ wynikają zatem nierówności (20) oraz (19), czyli wypukłość. Implikację w drugą stronę można wykazać pamiętając, że pochodna jest granicą ilorazów różnicowych, a słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy. Tu porównywać będziemy ilorazy różnicowe na na ogół rozłącznych przedziałach, czyli I_{s_1,t_1} oraz I_{s_2,t_2}, gdzie $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$. Ale te wynikają z wypukłości (równoważnej (21)), gdyż możemy każdy z tych ilorazów różnicowych porównać z I_{t_1,s_2}.

Ze wspomnianej monotoniczności ilorazów różnicowych można łatwo wywnioskować, że wartości tych ilorazów są wspólnie ograniczone na przedziałach o końcach a, b zawartych w dziedzinie (α, β) funkcji wypukłej f, o ile $\alpha + \epsilon < a < b < \beta - \epsilon$, a ponieważ $|f(b) - f(a)| = |b - a||\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$, wynika stąd ciągłość funkcji wypukłych w punktach wewnętrznych dziedziny.

9 Badanie przebiegu funkcji

Jeśli mamy wzór zadający jakąś funkcję, chcemy wywnioskować pewne jej własności, określić jej „punkty charakterystyczne" i (przynajmniej w pewnym przybliżeniu) naszkicować wykres. Przechodząc przez kolejne punkty poniższej procedury będziemy w stanie zgromadzić (np. w formie tabelki) potrzebne w tym celu dane. Kolejność postępowania jest następująca:

- Określamy dziedzinę $D(f)$ badanej funkcji f;
- Jeśli dziedzina jest symetryczna względem zera, sprawdzamy, czy przypadkiem funkcja nie jest parzysta, bądź nieparzysta;
- W przypadku, gdy do dziedziny należą punkty z otoczenia jednostronnego danego punktu $x_0 \notin D(F)$, badamy granice (lewo- / prawostronne) w tym punkcie. Dotyczy to również punktów $x_0 = \pm\infty$;
- Tym samym badamy istnienie asymptot pionowych (=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0, y \in \mathbb{R}\}$) w punktach $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz asymptot poziomych gdy $x_0 = \pm\infty$;
- Jeśli istnieje $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}$, badamy, czy istnieje asymptota ukośna (o równaniu $y = Ax + B$). Wtedy $B = \lim_{x\to+\infty} f(x) - Ax$. Podobnie -w $-\infty$. Nasz wykres będzie nieograniczenie bliski linii asymptoty w „pobliżu x_0";
- Na ogół funkcja jest ciągła na swej dziedzinie -w przeciwnym przypadku określamy jej punkty nieciągłości i ich charakter (skokowe/usuwalne/II typu);
- Wyznaczamy miejsca zerowe (i znak funkcji w odpowiednich przedziałach);
- Znajdujemy pochodną (podając jej dziedzinę i wzór);
- Określamy miejsca zerowe pochodnej i jej znak, co na ogół daje informację o ekstremach lokalnych funkcji i o jej przedziałach monotoniczności;
- Obliczamy drugą pochodną (podając jej dziedzinę i wzór);
- Określamy, na jakich przedziałach funkcja jest wypukła (odp. wklęsła), znajdując ewentualne punkty przegięcia;

- Sporządzamy tabelkę, umieszczając na jej "poziomej osi" -czyli w pierwszym wierszu -punkty charakterystyczne. Są to (zaczynając od $-\infty$, w porządku rosnącym) krańce dziedziny, czy ogólniej, punkty spoza dziedziny, będące krańcami przedziałów tworzących dziedzinę, miejsca zerowe funkcji i jej pochodnych: f', f''. W kolejnych wierszach zamieszczamy symbole $+, -, 0$ odpowiadające znakowi f, f', f'' W przypadku znaku $+$ dla f' możemy zaznaczyć ukośną strzałkę w prawo w górę -na danym przedziale f rośnie; W analogicznej sytuacji dla drugiej pochodnej -zaznaczamy, czy wypukłość jest zwrócona ku górze ($f'' < 0$, wklęsłość f), czy ku dołowi -rysując (z uwzględnieniem monotoniczności) kawałki łuków. One dadzą już przybliżony przebieg wykresu f; Uwzględniając na osi wspomniane punkty charakterystyczne (i wartości f w tych punktach), rysujemy przybliżony wykres funkcji.

Przykłady podałem na wykładzie. (Niestety, procedura ta bywa dość pracochłonna, czaami warto skorzystać z programów komputerowych tworzących wykresy. Najbardziej precyzyjny i rozbudowany program "Mathematica" na stronie internetowej http://functions.wolfram.com/ podaje wykresy setek funkcji, ale jak funkcji zmiennej zespolonej, są to więc wykresy trójwymiarowe (np. rozdzielane na osobne wykresy części rzeczywistj i zespolonej), można jednak uzyskać tam również ich zawężenia do osi rzeczywistej.

10 Funkcje pierwotne, całka nieoznaczona

Rachunek całkowy jest jednym z podstawowych narzędzi dla zastosowań matematyki, jego geneza (w pracach Barrowa, Newtona i Leibniza) (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Biographies/Barrow.html, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Newton.html, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leibniz.html) związana była z tworzeniem opisu ilościowego zjawisk fizycznych, na przykład, z rozwiązywaniem równań opisujących ruch. Badania związane z rozwojem rachunku całkowego dostarczały przełomowych odkryć w matematyce i ich zastosowań przez niemal 400 lat. Zanim przejdziemy do ciekawych z praktycznego punktu widzenia zagadnień (całka oznaczona, miara), poznamy podstawowe pojęcia umożliwiające znajdywanie takich całek -a mianowicie pojęcie funkcji pierwotnej i całki nieoznaczonej.

Definicja 6 *Funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ nazwiemy funkcją pierwotną dla funkcji f w zbiorze $D \subset D(f)$, jeśli F ma w każdym punkcie tego zbioru pochodną, przy czym*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D. \tag{22}$$

Całką nieoznaczoną z funkcji f nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych (określonych na naturalnej dziedzinie funkcji f), oznaczany symbolem

$$\int f(x)\,dx.$$

Jeśli f ma w przedziale D funkcję pierwotną, to (jako pochodna tej funkcji) musi ona spełniać pewne warunki -na przykład osiągać wszystkie wartości pośrednie (Tw. Darboux), więc nie każda funkcja może mieć funkcję pierwotną. Jako ćwiczenie proponuję bezpośrednio sprawdzić, że funkcja, równa -1 dla $x \leqslant 0$ oraz $+1$ dla $x > 0$ nie ma funkcji pierwotnej w żadnym otoczeniu zera.

Tym niemniej, wkrótce zobaczymy, że każda funkcja ciągła na przedziale ma w tym przedziale pierwotną. Jedynie takie funkcje będą nas interesować w dalszym ciągu, więc „z istnieniem nie ma problemu". Gorzej -z jednoznacznością. Mamy bowiem następujący rezultat:

Twierdzenie 35 *(i) Gdy F jest funkcją pierwotną dla f, zaś C- dowolną stałą, to $F + C$ też jest funkcją pierwotną dla f.*
(ii) Na odwrót, gdy F oraz G są funkcjami pierwotnymi dla tej samej funkcji

w zbiorze D, to ich różnica jest stała na każdym przedziale zawartym w tym zbiorze D. (Mówimy wówczas, że $F-G$ jest **lokalnie stała** *w zbiorze D.)*

Zazwyczaj tezę (ii) wypowiadamy: *„funkcje pierwotne dla danej funkcji różnią się o stałą”*. Dla funkcji $\Phi = F - G$ stosujemy wzór na pochodną różnicy, stąd $(F-G)' = 0$. Ale należy pamiętać, że z zerowania się pochodnej funkcji Φ wynika jej stałość jedynie na przedziałach (tw. Lagrange'a). Na przykład, dla funkcji signum pierwotnymi w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ są zarówno funkcje $F(x) = |x|$, jak i $G(x) = |x| + \operatorname{sgn}(x)$ -różniące się właśnie o $\operatorname{sgn}(x)$. Gdy F spełnia warunek (22), używamy zapisu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

gdzie C nazywana „stałą całkowania” oznacza zbiór wszystkich możliwych stałych (a ściślej, funkcji lokalnie stałych) na dziedzinie f. W dalszym ciągu słowo „lokalnie” opuszczamy, pamiętając, jak należy rozumieć stałe w przypadku dziedziny będącej np. sumą pewnej ilości przedziałów otwartych parami rozłącznych.

Zauważmy na wstępie bardzo ważną własność, którą możemy określić jako **Liniowość całki nieoznaczonej**:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \qquad \int \alpha f(x) = \alpha \int f(x).$$

Są to bezpośrednie wnioski z liniowości całki. Tu α oznacza stałą i odpowiednia równość mówi, że *„stałą można wyłączyć przed znak całki”*. Należy tylko podkreślić, że suma całek rozumiana jest jako suma algebraiczna 2 zbiorów,

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

-tym razem są to zbiory funkcji, zaś dla $A = \{F + C_1 : C_1 \text{ −stała}\}, B = \{G + C_2 : C_2 \text{ −stała}\}$, możemy (traktując $C_1 + C_2$ jako nową stałą) zapisać w tym przypadku $A + B = \{F + G + C : C \text{ −stała}\}$. Aby nadać działaniom dodawania i mnożenia przez stałą precyzyjny sens, można odwołać się do pojęcia przestrzeni ilorazowej (zbioru klas abstrakcji względem relacji równości funkcji z dokładnością do składnika stałego). Jeśli wyjdziemy od przestrzeni (wektorowej) funkcji różniczkowalnych w przedziale D, otrzymamy strukturę przestrzeni wektorowej na zbiorze wspomnianych klas abstrakcji. Na szczęście, nie będziemy musieli korzystać z tak zaawansowanych pojęć, ograniczymy się do formalnych działań na stałych.

Naszym punktem wyjścia będzie znajomość podstawowych 9 pochodnych z funkcji elementarnych, które (po ewentualnym wykorzystaniu liniowości) prowadzą do listy podstawowych całek :

$$\int t^\beta\,dt = \frac{1}{1+\beta} t^{1+\beta} + C, \text{ gdy } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \int t^{-1}\,dt = \ln|t| + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ gdy } a \in (0,1) \cup (1, +\infty),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Do dyspozycji mamy ponadto dwa wzory wynikające bezpośrednio z zasad różniczkowania iloczynu (pozypomnijmy, $(FG)' = F'G + FG'$) oraz funkcji złożonej: $\frac{d}{dx} F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)$. Są to następujące zasady:

Twierdzenie 36 Zasada całkowania przez części:

$$\int F'(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)\,dx$$

Zasada całkowania przez podstawienie:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C, \quad \text{gdzie} \quad F(y) + C = \int f(y)\,dy.$$

Z pierwszej zasady korzystamy, gdy pod całką mamy iloczyn dwu funkcji, powiedzmy $u(x)g(x)$ takich, że po pierwsze potrafimy znaleźć całkę $F(x) = \int u(x)\,dx$, a po drugie, będziemy w stanie znaleźć (lub dalej przekształcić) całkę z iloczynu $F(x)g'(x)$.

Na przykład, w całce $\int xe^x\,dx$ możemy z łatwością znaleźć całki z czynników: $\int e^x = e^x + C$, $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$. Którą z tych całek powinniśmy przyjąć jako F? Spróbujmy na 2 sposoby: $F'(x) = e^x, G(x) = x$, to całkując przez części, mamy $\int xe^x\,dx = xe^x - \int F(x)G'(x)\,dx = xe^x - e^x$, gdyż $G'(x) = 1$. Drugi sposób będzie mniej skuteczny -przyjmując $F'(x) = x, G(x) = e^x$ mamy $\int xe^x\,dx = FG - \int FG'\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x$ -zupełna porażka, gdyż wykładnik potęgi x zwiększa się o 1. Widzimy, że podobną metodę (z $F'(x) = e^x$) możemy stosować przy liczeniu całek typu $\int x^ne^x\,dx$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ -tym razem całkując przez części jedynie obniżymy wykładnik o 1, otrzymując do wyliczenia całkę z $nx^{n-1}e^x$. Do niej ponownie można stosować analogiczne całkowanie przez części (itd., aż dostaniemy $\int x^0e^x\,dx$ pomnożone przez pewną stałą).

Z odmienną sytuacją mamy do czynienia dla całki typu $J(x) := \int e^x \sin x\,dx$. Przyjmując, jak poprzednio, $F'(x) = e^x$, tym razem dla $G(x) = \sin(x)$, otrzymamy $J(x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$. To nie koniec, do całki $\int e^x \cos x\,dx$ stosujemy znów metodę „przez części”, otrzymując (dla $F'(x) = e^x$) $\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx$, więc uwzględniając minus przed nawiasem, $J(x) = e^x \sin x - e^x \cos x - J(x)$. Więc znowu to samo $J(x)$ -po prawej stronie równości! -ale patrząc dokładnie widzimy, że to można przenieść na jedną stronę, otrzymując konkretny wzór na $2J(x)$. Podobnie postępujemy (2-krotnie) w całkach typu $J_n(x) = \int \sin^n x\,dx$, otrzymując po prawej stronie wyrażenie typu $f(x) + \alpha J_n(x) + \beta J_{n-2}(x)$, przy czym $\alpha \neq 1$. To pozwala wyliczyć J_n poprzez pewną funkcję od J_{n-2} (tzw. wzór redukcyjny).

Trzeci typ zastosowań całkowania przez części polega na obliczaniu całek typu $\int g(x)\,dx$ w sytuacji, gdy łatwiej jest całkować funkcję $xg'(x)$. Przyjmujemy $F(x) = x$, więc posługujemy się tu „sztuczną jedynką” pisząc $\int g(x)\,dx = \int 1g(x)\,dx = \int x'g(x)\,dx$. To działa np. dla funkcji $g(x) = \ln x, \mathrm{arctg} x, \arcsin x$.

Licząc ostatnie całki warto równocześnie korzystać z całkowania przez podstawienie. Na przykład, $\int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \phi'(x)\frac{1}{\phi(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\phi(x) + C$ dla $\phi(x) = 1 + x^2$ (Zauważmy, że modułu nie trzeba używać, gdy $\phi > 0$ w całej dziedzinie.) Całkując przez części funkcję $g(x) = \arcsin x$ użyjemy podstawienia $\phi(x) = 1 - x^2$ dla $|x| < 1$.

Rozwiązując zadania z całek oznaczamy na ogół w jakiś sposób nasze podstawienie (np. pisząc symbol nowej zmiennej -np. $u = \phi(x)$). Wówczas musimy zamiast $\phi'(x)dx$ wpisać du. Mamy jednak wzór na różniczkę funkcji ϕ, a mianowicie, $d\phi = \phi'(x)dx$, więc wpisując oznaczenie różniczki, określamy od razu nasze podstawienie. Na przykład, wiedząc, że $d(1-x^2) = -2x$, możemy zapisać $\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1 - x^2)$ -to już liczymy jako całkę z funkcji potęgowej o wykładniku $\beta = -\frac{1}{2}$, w wyniku podstawiając w miejscu zmiennej t -nasze $1 - x^2$. Często (ze względów typograficznych), zamiast $\int \frac{1}{h(x)}\,dx$ wygodniej jest pisać $\int \frac{dx}{h(x)}$. Tak samo, w liczniku umieszczamy różniczkę podstawienia. Na przykład, $\int \mathrm{tg}\, x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.