Zadanie 1. (a) Opisać algebrę $\mathcal{A}$ generowaną przez rodzinę $\mathcal{S}_3$ wszystkich 3-elementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.
(b) Opisać najmniejszą sigma-algebrę $\mathfrak{M} \subset 2^{\mathbb{N}}$ zawierającą wszystkie zbiory rodziny $\mathcal{S}_3$.

Zadanie 2. Jeśli $2\mathbb{N}$ oznacza zbiór naturalnych liczb parzystych, sprawdzić, czy sigma-algebra $\sigma\{A \in \mathcal{S}_3 : A \subset 2\mathbb{N}\}$ generowana przez 3-elementowe zbiory liczb parzystych jest równa

$$2^{2\mathbb{N}} \cup \{E \cup (\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}) : E \subset 2\mathbb{N}\} = \{A \subset \mathbb{N} : A \subset 2\mathbb{N} \text{ lub } (\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}) \subset A\} \ ?$$

Zadanie 3. Przypomnijmy, że $\sigma\{f_j : j \in J\}$ oznacza σ-algebrę generowaną przez rodzinę funkcji $\{f_j : j \in J\}, f_j : \Omega \to \mathbb{R}$, czyli najmniejszą, dla której wszystkie te funkcje są mierzalne. W najprostszej sytuacji, $\#J = 1$, zaś f_1 jest funkcją prostą. Niech $f_1(t) = \text{sgn}(t), f_2(t) = f_1(t-1)$. Opisać $\sigma\{f_1\}$ oraz $\sigma\{f_1, f_2\}$ przy użyciu pewnych algebr generowanych przez pewne skończone rodziny zbiorów (tzn. podając układ zbiorów generujących, a nie wyliczając wszystkie zbiory).

Zadanie 4. Na σ-algebrze generowanej przez wszystkie skończone podzbiory zbioru $\mathbb{R}$ (jak już wiemy, to zbiory przeliczalne lub "ko-przeliczalne" -tu traktujemy zb. skończone jako przeliczalne) określmy funkcję zbioru $\nu(E)$ jako równą zero, gdy $\#E \le \aleph_0$ oraz równą 2 , gdy $\#(\mathbb{R} \setminus E) \le \aleph_0$. Czy ν jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru?

Zadanie 5. Gdy μ jest miarą na σ-algebrze $\mathcal{B} \subset 2^{\Omega}$, rozważmy

$$\mathcal{N} = \{E \subset \Omega : \exists_{A \in \mathcal{B}} E \subset A, \ \mu(A) = 0\}.$$

Sprawdzić, że warunek $E \sim F \ \Leftrightarrow \ E \Delta F \in \mathcal{N}$ określa relację równoważności w 2^{Ω}. Jest to relacja zgodna z sumami przeliczalnymi w tym sensie, że gdy $\forall_n E_n \sim F_n$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Zadanie 6. (Przy oznaczeniach poprzedniego zadania) sprawdzić, że rodzina

$$\overline{\mathcal{B}} = \{E \subset \Omega : \exists_{A \in \mathcal{B}} E \sim A\} \tag{1}$$

jest σ-algebrą. Dla zbiorów E, A jak w (1) można wykazać, że wzór $\bar{\mu}(E) := \mu(A)$ definiuje miarę zupełną. Jest to rozszerzenie μ do tzw. miary zupełnej $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0, +\infty]$ (czyli takiej, że podzbiory zbiorów miary zero są mierzalne). My otrzymamy takie rozszerzenie w nieco inny sposób podczas konstrukcji miary Lebesgue'a. Okaże się, że dla $E \in \overline{\mathcal{B}}$ istnieje zbiór A typu F_σ równoważny z E, czyli taki, że $E \sim A$.

Przypomnijmy, że gdy $\mathcal{A}$ jest jakąś rodziną zbiorów, to $\mathcal{A}_\sigma$ oznacza ogół przeliczalnych sum postaci $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_n \in \mathcal{A}$. Jeśli $\mathcal{F}$ oznacza ogół zbiorów domkniętych (np. w $\mathbb{R}^n$), to zbiory typu F_σ, to zbiory z rodziny $\mathcal{F}_\sigma$ Natomiast $\mathcal{A}_\delta$ oznacza rodzinę utworzoną przez przecięcia przeliczalnej ilości zbiorów z $\mathcal{A}$.

Zadanie 7. Sprawdzić, że każdy otwarty podzbiór osi rzeczywistej jest typu F_σ. (UWAGI: Powtarzanie operacji "sigma-delta" skończoną ilość razy daje silnie rosnący ciąg rodzin zbiorów, np. $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$, a po rozszerzeniu go (indukcja pozaskończona) aż do pierwszej nieprzeliczalnej liczby porządkowej dostaniemy wszystkie zbiory borelowskie. W ten sposób dowodzi się, że σ-algebra zbiorów borelowskich jest mocy continuum. Wykazanie, że zbiór liczb niewymiernych nie jest typu F_σ wymaga użycia tw. Baire'a, które (w szczególnym przypadku) mówi, że gdy zbiory domknięte mają puste wnętrza, to również wnętrze ich przeliczalnej sumy jest puste. Analogiczna teza zachodzi, gdy zamiast podzbiorów osi liczbowej, rozważamy ciągi podzbiorów przestrzeni metrycznych zupełnych.