Analiza IIIs -ćwiczenia (całki krzywoliniowe, pola wektorowe).

1. Obliczyć na 2 sposoby całkę $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$ po dodatnio zorientowanym brzegu $\gamma = \partial D$ elipsy $D = \{(x,y) : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{x}{b})^2 \leqslant 1\}$.

2. Niech Γ będzie dodatnio zorientowaną krzywą złożoną z łuku paraboli $y = x^2$ oraz odcinka prostej $y = x$. Wyznaczyć $\int_\Gamma \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\,dy - \,dx$.

3. Obliczyć całkę $\int_\kappa \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ wzdłuż łamanej κ łączącej po kolei punkty (1,0), $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraz (0,1).

   Ile wynosi całka z pola wektorowego rozważanego w poprzednim zadaniu wzdłuż dodatnio zorientowanej krzywej Jordana (w zależności od tego, czy okrąża ona początek układu, czy też nie).

4. Obliczyć $\int_\gamma y(x-y)\,dx + x\,dy$ wzdłuż fragmentu linii o równaniu $y = 2x^2$ od początku układu współrzędnych do punktu (1,2). [odp. $1 + \frac{1}{30}$.]

5. Przypuśćmy, że $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ jest krzywą łączącą punkty $A = (0,0)$ oraz $B = (b, 3b)$, gdzie $b > 0$, ograniczająca wraz z odcinkiem AB figurę o polu S. W przypadku, gdy $\forall_{t\in(0,1)} \Gamma(t) \in \{(x,y) : x \leqslant 3y\}$ wyznaczyć całkę
$$I = \int_\Gamma (e^x \sin y - 5y)\,dx + (e^x \cos y - 5)\,dy.$$

6. Obliczyć całki krzywoliniowe nieskierowane :$A = \int_\alpha (x^{4/3} + y^{4/3}) d|\alpha|$, gdzie α jest asteroidą o równaniu $(x^{2/3} + y^{2/3}) = r^{2/3}$ oraz $B = \int_\gamma x^2 d|\gamma|$, gdzie γ oznacza okrąg wyznaczony układem równań $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x + y + z = 0$.

7. Iloraz całki nieskierowanej z danej współrzędnej przez długość krzywej daje odpowiednią współrzędną środka ciężkości krzywej jednorodnej. Wyliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnej linii śrubowej $x = t\cos 2t,\ y = t\sin 2t, z = t, t \in [0, 2\pi]$.

8. Jakie warunki powinna spełniać funkcja $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, aby całka $\int_\gamma F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$ nie zależała od drogi całkowania?

9. Pole grawitacyjne generowane przez masę punktową umieszczoną w początku układu współrzędnych działa na punkt P (traktowany jako wektor o normie $r = \|P\|$) siłą $F(P) = \frac{g}{r^3}P$, $g =$ pewna stała. Jaką pracę trzeba wykonać, by przemieścić punkt o masie jednostkowej wzdłuż drogi $x = \cos t, y = 1, z = \sin t$ z punktu $A(1,1,0)$ do punktu B(0,1,1)

10. Przypomnijmy, że funkcja u klasy C^1 jest potencjałem dla pola wektorowego $\vec{F}$, gdy jest ono jej gradientem. Sprawdzić, że gdy $g(t) = \int \phi(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną dla ϕ, to potencjałem dla "pola centralnego" $\vec{F}$ postaci
$$\vec{F}(\vec{v}) = \frac{g(r)}{r}\vec{v}, \quad \text{gdzie} \quad \vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathrm{r} = \|\vec{\mathrm{v}}\| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2},$$
jest $\phi \circ r$

11. Potencjał pola $P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ można wyznaczać, jak całkę nieoznaczoną, gdzie pierwsza stała całkowa zależy od (y,z), druga -od z, trzecia (z relacji $\partial u/\partial z = R$) jest już na prawdę stała. Wyznaczyć potencjały w przypadku:

    (a) $P = 2x + y + 3, Q = 4y + x + 2, R = 6z - 6 \quad [x^2 + xy + 3x + 2y^2 + 2y + 3z^2 - 6z]$
    (b) $P = \frac{1}{x} + yz, Q = \frac{1}{y} + xz, R = \frac{1}{z} + xy \quad [xyz + \ln|xyz|]$
    (c) $P = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}, R = \frac{1}{1+z^2} \quad [-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg} z, y \neq 0$ lub $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \operatorname{arc\,tg} z, x \neq 0]$