Zadania z teorii miary i całek powierzchniowych

1. Wykończyć według następującego szkicu dowód tw. o pokryciu: załóżmy, że

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha, \text{ gdzie K jest domknięty i ograniczony, } \mathrm{W}_\alpha \text{ −otwarte} \tag{1}$$

   w $\mathbb{R}^d$. Gdyby K nie miał skończonego pokrycia pewnymi zbiorami z tej rodziny, to jednak istniałaby skończona rodzina kul domkniętych o promieniach 2^{-n} pokrywająca K i dla przynajmniej jednej z nich, powiedzmy dla $K(x_n, 2^{-n})$ -zbioru $K_n := K \cap K_n$ nie dało by się pokryć skończoną ilością zbiorów W_α (dlaczego?). Zastępując K przez K_n utworzymy $K_{n+1} \subset K_n$ „niepokrywalny skończoną ilością W_α". Rozważając punkt skupienia x_* dla (x_n) sprawdzić, że $\exists_{\beta\in A}\ x_* \in K \cap W_\beta$ i pewien K_m w całości zawiera się w W_β, co da ewidentną sprzeczność z konstrukcją. (Uw. nie musi być $x_n \in K$, jedynie $x_* \in K$.)

2. My stosować będziemy jedynie przypadek przeliczalny $A = \mathbb{N}$, gdzie dowód znacznie się upraszcza. Warunek pokrycia (1) jest równoważny równości $\emptyset = \bigcap_n K \setminus W_n$. Wystarczy sprawdzić dla malejącego ciągu zbiorów domkniętych $F_n = F_{n-1} \cap (K \setminus W_n)$, że (1) $\Rightarrow$ $(\exists_k F_k = \emptyset)$. Wiemy, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. [Dowodząc nie wprost, wybrać dowolne $y_n \in F_n$].

3. Gdy $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ jest skończenie addytywną funkcją zbioru na algebrze $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, to sprawdzić, że przeliczalną addytywność μ (w obrębie $\mathcal{A}$) implikuje każdy z warunków:
   (i) warunek ciągości: $A_n \in \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1}, A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) = \lim \mu(A_n)$
   (ia) $\lim(\mu(E_n) = 0$ dla ciągów malejących (=zstępujących) do $\emptyset = \bigcap_n E_n$, gdzie $E_n \in \mathcal{A}$.
   (ii) warunek przeliczalnej subaddytywności: $B_n \in \mathcal{A}$, $B = \bigcup_n B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(B) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n)$
   (iii) Gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i istnieje rodzina $\mathcal{K}$ zbiorów zwartych taka, że

$$\forall_{A\in\mathcal{A}}\, \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{B\in\mathcal{A}}\, \exists_{K\in\mathcal{K}}\ B \subset K \subset A,\ \mu(A \setminus B) < \epsilon.$$

   wsk. Z (iii) wywnioskować (ia) dobierając K_n, B_n do $2^{-1}\epsilon$. Nasza μ posiada "skończone odpowiedniki elementarnych własności miary", np. skończ. podaddytywność, wzór $\mu(A \setminus B) =$...

4. Obliczyć całki powierzchniowe: $I = \int\int_S f dS$, jeżeli :
   (a) $f(x, y, z) = y + \sqrt{a^2 - x^2}$, $S = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leqslant y, 0 \leqslant z \leqslant h\ \ [I = 4a^2h]$
   (b) $f(x, y, z) = (1 + x + y)^{-2}$, $S = 4$ ściany czworościanu $[0, 1]^3 \cap \{(x, y, z) : x + y + z \leqslant 1\}$
   (c) $f(x, y, z) = z$, $S = \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : |\alpha| \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant a\}$

5. Wykazać następujący wzór Poissona dla sfery S opisanej równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i dla funkcji ciągłej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\int\int_S g(ax + by + cz)\, dS = 2\pi \int_{-1}^1 g(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, dt.$$

   [wsk.: w nowym układzie współrzędnych (s, t, w) niech $w = \frac{ax+by+cz}{\|(a,b,c)\|}$ (z ortogonlna macierzą przejścia, opis S pozostaje „bez zmian"]

6. Znaleźć środek ciężkości (x_c, y_c, z_c) powierzchni jednorodnej odciętej z paraboloidy o równaniu $y^2 + z^2 = 10x$ półprzestrzenią $x \leqslant 10$. Przypomnijmy, że współrzędne te są średnimi całkowymi z danych współrzędnych, np. $y_c = \frac{1}{|\sigma|}\int\int_\sigma y dS$, a w przypadku niejednorodnym dS mnożymy przez funkcję gęstości ρ , wynikzamiast przez $|\sigma|$- dzielimy przez masę powierzchniliczoną jako całka $\int\int_\sigma \rho\, dS$.

7. Dla powierzchni z orientacją w kierunku zewnętrznym policzyć całki:

$$\int\int_{x^2+y^2=z^2, 0\leqslant z\leqslant h} (y - z)\, dydz + (z - x)\, dzdx + (x - y)\, dxdy$$

$$\int\int_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ 0\leqslant z\leqslant h} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy$$