Analiza IIIs -ćwiczenia (4) (algebry zbiorów, przykłady miar). Dla dowolnego zbioru Ω mamy 2 najprostsze przykłady miar określonych na σ-algebrze 2^Ω wszystkich podzbiorów:

(i) "***Delta Diraca***" w punkcie $x \in \Omega$ (zwana też miarą atomową w punkcie x, lub *masą jednostkową* skoncentrowaną w tym punkcie):

$$\delta_x(E) = 1 \quad \text{gdy x} \in \text{E}, \quad \delta_\text{x}(\text{E}) = 0 \quad \text{gdy x} \notin \text{E}.$$

(ii) Równie prosto możemy zdefiniować ***miarę liczącą***:

$$\mu_\#(E) = \#E \qquad \text{(ilość elementów dla zbiorów skończonych}$$

oraz $\mu_\#(E) = +\infty$ gdy E jest nieskończonym podzbiorem zbioru Ω). Poza miarami z (i), (ii), trudno o nietrywialne przykłady miar określonych na 2^Ω -z wyjątkiem miary związanej z sumowaniem nieskończonym:

(iii)DEFINICJA Mówimy, że liczba $S \in \mathbb{R}$ jest ***sumą nieskończoną*** rodziny liczb $\{x_k\}_{k\in\Omega}$, co zapisujemy

$$S = \sum_{k\in\Omega} x_k,$$

jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki skończony zbiór $E_0 \subset \Omega$, że dla każdego skończonego nadzbioru mamy:

$$E_0 \subset F \subset \Omega,\ \#F < +\infty\ \Rightarrow |\sum_{k\in F} x_k - S| < \epsilon. \tag{1}$$

W przeciwnym przypadku (tzn. gdy żadna liczba $S \in \mathbb{R}$ nie spełnia (1)), zaś $\forall_k x_k \geqslant 0$, przyjmujemy $S = +\infty$. Występujące w tej definicji sumy po skończonym zbiorze wskaźników F definiujemy indukcyjnie względem $\#F$:= ilości elementów. Dodatkowo potrzebujemy określenia tej sumy jako równej zero gdy $F = \emptyset$. Teraz mając dowolnie ustaloną "funkcję wagową" $\rho : \Omega \to [0, +\infty]$ zdefiniujmy następującą funkcję zbioru:

$$\mu = \sum_{k\in\Omega} \rho_k \delta_k, \quad \text{dokładniej}, \quad \mu(\text{A}) = \sum_{\text{k}\in\Omega} \rho_\text{k}\delta_\text{k}(\text{A}) = \sum_{\text{k}\in\text{A}} \rho_\text{k}. \tag{2}$$

Na ogół zakłada się, że $\rho_k < +\infty$ (w przeciwnym przypadku jeśli $\delta_k(A) = 0$, przyjmuje się, że $(+\infty)\cdot 0 = 0$). Na przykład, gdy $\rho_k = \delta_{x,k}$ (delta Kroneckera), otrzymamy miarę z punktu (i), a gdy $\rho_k = 1$ dla wszystkich $k \in \Omega$ -miarę liczącą. Poza przypadkiem miary zerowej, otrzymane miary nazywa się *miarami atomowymi*. Nośnik miary, -przez co tu rozumiemy zbiór supp(μ)zdefiniowany jako

$$\text{supp}(\mu) := \{k : \rho_k > 0\}$$

może w pewnym sensie zastąpić zbiór Ω. Na przykład, miary o nośniku skończonym to dokładnie takie miary, które są skończonymi kombinacjami liniowymi delt Diraca (kombinacje te są o współczynnikach nieujemnych). (Niektórzy używają tego oznaczenia na domknięcie nośnika, które ja będę nazywał nośnikiem domkniętym i oznaczał $\overline{\text{supp}}(\mu)$!) Przypomnijmy: mówimy, że miara $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ na sigma-algebrze $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ jest σ-skończona, gdy istnieje ciąg zbiorów miary skończonej pokrywający Ω, czyli $\exists A_n \in \mathcal{A}$ takie, że $\forall_n \mu(A_n) < +\infty$ oraz $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Zadania

1. Wykazać, że gdy suma S z definicji (iii) jest skończona, zaś $\forall_k x_k \geqslant 0$ (założenie o nieujemności jest nawet zbędne!), to zbiór $\{k \in \Omega : x_k \neq 0\}$ jest co najwyżej przeliczalny i przy dowolnym (bijektywnym) ustawieniu tego zbioru w ciąg $\{k_n\}_n$ otrzymamy szereg bezwzględnie zbieżny $\sum_{n=1}^\infty x_{k_n}$ o sumie $= S$.

2. Wywnioskować, że nośnik σ-skończonej miary atomowej musi być przeliczalny (nie dotyczy to "domkniętego nośnika"). Natomiast każda miara na zbiorze przeliczalnym musi być postaci (2).

3. Sprawdzić warunki przeliczalnej addytywności dla funkcji zbiorów: $\delta_x, \mu_\#, \mu$ określonych powyżej. W ostatnim przypadku można zagadnienie sprowadzić do odpowiedniego twierdzenia o szeregach (z indeksami pogrupowanymi w przeliczalną ilość bloków)

4. (Wcześniej) Oznaczmy symbolem $\mathcal{F}in(\Omega) := \{E \subset \Omega : \#E < \aleph_0\}$) -ogół skończonych podzbiorów w Ω. Sprawdzić, że z sumowalności (= warunek (1) dla pewnej liczby $S \in \mathbb{R}$) wynika sumowalność (x_k) po dowolnym podzbiorze Ω_1 zbioru Ω. W tym celu można sprawdzić, że zbieżność dla sumy (po $k \in \Omega$) jest równoważna następującemu „***warunkowi Cauchy'ego***"

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{E(\epsilon)\in\mathcal{F}in(\Omega)} \forall_{K\in\mathcal{F}in(\Omega)} \ K \cap E(\epsilon) = \emptyset \ \Rightarrow |\sum_{k\in K} x_k| < \epsilon. \tag{3}$$

(Wskaz. Jeśli (3) zachodzi, wykazać zbieżność ciągu $S_n = \sum_{k\in E(\frac{1}{n})} x_k$ i sprawdzić, że dla $k \in \Omega \setminus E(\frac{1}{n})$ mamy $|x_k| = |\sum_{j\in\{k\}} x_j| < \frac{1}{n}$. Wykazać, że $S = \lim S_n$ spełnia wówczas (2).)

5. Na rodzinie otwartych podzbiorów U zbioru $\mathbb{R}$ można określić dokładnie jedną przeliczalnie addytywną funkcję zbioru μ w taki sposób, by dla $U_{ab} = (a,b)$, gdzie $a < b$ było $\mu(U_{ab}) = b - a$. (To dokładnie sprawdzimy na wykładzie. Gdy $U \subset [0,1]$, możemy przyjąć $\mu([0,1] \setminus U) := 1 - \mu(U)$. (Podobnie można zdefiniować miarę dowolnego zbioru zwartego A , jeśli δ jest przedziałem (otwartym) zawierającym A, zamiast 1 wstawiamy jego długość, rolę U pełni $\mu(\Delta)$. Wykazać, że zbiór trójkowy Cantora ma miarę zero. To samo dotyczy zbioru tych liczb $x \in [0,1]$, które w rozwinięciu dziesiętnym nie mają na żadnej pozycji cyfry 5 (lub innej z góry zadanej cyfry $p \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

6. Zbiór miary zero (Lebesgue'a) był już dużo wcześniej zdefiniowany -jako posiadający pokrycia przeliczalne odcinkami otwartymi Δ_n o dowolnie małej sumie długości (= suma szeregu $\sum_n \mu(\Delta_n)$. Wykazać, że suma przeliczalnej ilości zbiorów miary zero jest nadal zbiorem miary zero.

7. Obraz zbioru miary zero przez funkcję monotoniczną, ciągłą, nie musi być miary zero: (funkcja Cantora "diabelskie schody"). Natomiast wykazać, że gdy f jest klasy $C^1(\Delta)$ na przedziale otwartym Δ, to obrazy $f(A)$ zbiorów A miary zero -są nadal miary zero.

8. Gdy $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ jest skończoną, skończenie addytywną funkcją zbioru (np. miarą skończoną), to miara różnicy symetrycznej:
$$d(A,B) := \mu(A \setminus B \cup B \setminus A)$$
spełnia nierówność trójkąta.

9. Wyznaczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach: $z = 0, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2$.

10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą Bernoulliego :
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0).$$
(Wskaz. $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \geqslant 0$ dla $|4t| < \pi$ oraz dla $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ Skorzystać też z symetrii).

11. Dwa tunele ograniczone powierzchniami: $z^2 + x^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$, wydrążono kostce $\max(|x|, |y|, |z|) \leqslant 2$ Jaka jest pojemność pozostałej (niewydrążonej) części kostki?

12. Obliczyć całkę potrójną z funkcji $\frac{1}{\|\vec{w}\|}$ po wydrążonej sferze opisanej przez $\sqrt{2} \leqslant \|\vec{w}\| \leqslant \sqrt{3}$, jeśli $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dla wektora $\vec{w}$ o współrzędnych euklidesowych x,y,z.

13. Obliczyć całkę zorientowaną
$$\int_K (e^x \sin y)\, dx + (e^x \cos y - 1)\, dy,$$
gdzie K jest górnym półokręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 2x$ zorientowanym od początku układu do punktu $(2, 0)$. [odpow. =zero]