Analiza IIIs -ćwiczenia (1) (całki niewłaściwe i z parametrem).

1. Wiedząc, że funkcją pierwotną dla $g(x) = e^{-ax}\sin bx$ jest $\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}$ wyliczyć $\int_0^\infty g(x)dx$ $(a>0)$.
2. Zbadać zbieżność bezwzględną całki $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ w zależności od parametru a. (wsk. $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$)
3. Zbadać zbieżność (odp. bezwzgl. zb.) -dla $A = \int_1^\infty \frac{\texttt{arc tgx}}{x^a}\,dx$, $B = \int_{-2} 2\frac{2x\,dx}{x^2-1}$, $C = \int_1^3 \frac{dx}{x\ln x}$, $D = \int_0^1 \ln x\,dx$, $E = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{|\cos x-\cos\alpha|}}$, $F = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.
4. (Całki Froullaniego): Dla $f \in C([0,+\infty)), 0<a<b$ wykazać, że
$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}\cdot(f(0)-\lim_{x\to+\infty} f(x)).$$
(wsk. $\int_t^T \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{at}^{aT}\frac{f(z)}{z}\,dz$, $\int_{at}^{aT} g(z)dz - \int_{bt}^{bT} g(z)\,dz = \int_{at}^{bt} g(z)\,dz - \int_{aT}^{bT} g(z)\,dz$ i do każdej z tych całek stosujemy I tw. o wart. średniej znajdując punkty pośrednie leżące pomiędzy at, bt (odp. pomiędzy aT, bT....)
5. Zamieniając kolejność całkowania dla $f(x,y) = x^y$, $y \in [a,b], x\in[0,1], 0<a<b$ sprawdzić, że $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a}$.
6. Dla $g(x,y)$ równej $-x^{-2}$ dla $0 \leqslant y < x \leqslant 1$ oraz równej y^{-2} dla $0\leqslant x<y\leqslant 1$ i zero w pozostałych punktach kwadratu $[0,1]\times[0,1]$ proszę sprawdzić, co zmieni się po zmianie kolejności całkowania w całkach iterowanych.
7. Funkcja dana wzorem $x^3y^{-2}e^{-x^2/y}$ dla $y>0$ oraz zreo dla y=0 sprawszić, że pochodna względem x z całki w punkcie $x=0$ jest różna od całki($\int_0^1$ po dy) z pochodnej (cząstkowej) z tej funkcji, choć całki są zbieżne.