Analiza IIIs -ćwiczenia (2) (całki niewłaściwe i z parametrem).

1. Dla $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takiej, że $\forall_{b>0} f \in R[0,b]$ ustalić zależność pomiędzy zbieżnością $\int_0^\infty f(s)\,ds$ oraz jednym z warunków: „$(\exists)[odp.\, \forall]$ ciąg[u] silnie rosnąc(y)[ego] $t_n \to +\infty, t_n > 0$ istnieje $\lim_k \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s)\,ds$ ” w przypadkach: (1) ogólnym (2) funkcji stałego znaku.

2. Czy ze zbieżności całki $\int_1^\infty f(x)\,dx$ wynika,że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ dla funkcji (a) ciągłej (b) jednostajnie ciągłej ?

3. Ze zbieżności całek niewłaściwych $\int_0^{+\infty}$ dla obydwu funkcji $(f(x))^2$ oraz $(f''(x))^2$ wywnioskować zbieżność analogicznych całek z funkcji $f(x)f''(x)$ oraz $(f'(x))^2$, jak również istnienie skończonej granicy $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

4. Dla $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ **monotonicznej**, mającej zbieżną $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ wykazać, że a całka jest równa granicy prawostronnej przy $\delta \to 0^+$ z wyrażeń $\delta \sum_{n=1}^{+\infty} f(n\delta)$. Obliczyć następnie
$$\lim_{\delta\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\delta}{1+\delta^2 n^2}.$$

5. Zbadać zbieżności całek niewłaściwych $\int_0^{+\infty}$ dla funkcji:
$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha},\ \alpha > 0, \quad f_2(x) = \sin(x^2), \quad f_3(x) = \ln^\alpha x \frac{\sin x}{x}.$$

6. Zbadać jednostajną zbieżność przy $y \to +\infty$ dla funkcji $\sin x^2 \mathtt{arc\,tg(yx)}$ oraz zbieżność całek od zera do $= \infty ...(dx)$ z tej funkcji . Analogiczne zadanie dla funkcji $\frac{y}{x^3}\exp(-\frac{y}{2x^2})$.