Analiza IIIs -ćwiczenia (3) (całki niewłaściwe, podwójne i algebry zbiorów).

1. Wyliczyć całki:
$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^4)}{x^3}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}$$

2. Dla $\alpha, \beta > 0$ zbadać pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial\beta} I(\alpha,\beta)$ dla funkcji $I(\alpha,\beta) := \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$, na tej podstawie wnioskując, że $I(\alpha,\beta) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$, gdzie $C(\alpha) = 0$. Następnie badając $\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha,\beta)$, sprawdzić, że tą granicą jest $\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

3. Zamienić kolejność całkowania w całce podwójnej w wyrażeniach:
$$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy, \qquad \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy, \qquad \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy,$$
$$\int_{-1}^1 dx \int_{\arccos x}^{\pi} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\pi x-\pi}^{\pi} f(x,y)\,dy.$$

4. *("Całki po obszarach symetrycznych z funkcji nieparzystych")* Gdy istnieją: odwzorowanie izometryczne "symetrii" $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\forall_{(x,y)} \sigma(\sigma(x,y)) = (x,y)$ oraz zbiory mierzalne (w sensie Jordana) A, B takie, że $|A\cap B| = 0$ oraz $\sigma(A) = B, \sigma(B) = A$, to dla f całkowalnej na$A\cup B$ i "nieparzystej wzgl. σ, czyli takiej, że $f(\sigma(x,y)) = -f(x,y)$, dla wszystkich $(x,y) \in A\cup B$, wykazać, że $\int\int_{A\cup B} f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

5. Obliczyć całkę podwójną I z funkcji $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ po obszarze płaskim Ω ograniczonym prostymi $y = x, x = 2$ oraz hiperbolą $y = \frac{1}{x}$. (odp.$\frac{9}{4}$)

6. Obliczyć całki podwójne I_1, I_2 z funkcji $f_1(x,y) = x^2,\ f_2(x,y) = \ln(1+x^2)\sin y$ po obszarze płaskim $\Omega = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$.

7. Gdy $\mathcal{S}$ jest σ-algebrą (odp. algebrą) podzbiorów zbioru x, zaś $f : X \to Y$ jest pewnym odwzorowaniem, to czy (σ-) algebrą jest rodzina zbiorów określona jako $\{E \subset Y :\ f^{-1}(E) \in \mathcal{S}\}$?

8. Podać przykład σ-algebry $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}}$, dla której żadne z odwzorowań $\mathbb{R} \ni x \to ax \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nie jest mierzalne.

9. Podać postać σ-algebry generowanej przez rodzinę podzbiorów 1-punktowych w $\mathbb{R}$.

10. Dla dowolnej algebry $\mathcal{A}$ pozdbiorów zbioru X określmy w X relację $x \simeq y$ poprzez warunek ($E \in \mathcal{A}, x \in E \Rightarrow y \in E$. Czy jest to relacja równoważności? Co można powiedzieć o skończonych algebrach o liczbie ich elementów?

11. Wykazać, że nie istnieje σ-algebra mocy $\aleph_0$. (wsk. istnieje w nieskończonych σ-alg. ciąg silnie malejący wzgl. relacji $\subset$.

12. Niech $\mathcal{S} = \{E \subset \mathbb{R} :\ E + 1 = E\}$ (= okresowość χ_E). Czy jest to σ-algebra i czy funkcje $\mathcal{S}$-mierzalne muszą być okresowe?.