całki krzywoliniowe, potencjały, ciągi funkcji mierzalnych

Zadanie 1. Obliczyć $I_1 = \int_\Gamma dx + y\,dy + z\,dz$ - całkę skierowaną po owalu Vivianiego Γ utworzonym z przecięcia górnej połowy sfery o równaniu $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0$ z powierzchnią waleca: $x^2+y^2 = x$. Czy występujące pod całką pole wektorowe ma potencjał i jeśli tak, to jaki?

Zadanie 2. Obliczyć całkę nieskierowaną z funkcji $f((x,y) = \frac{1}{4}(x^3y + xy^3)$ wzdłuż krzywej położonej w $\mathbb{R}^3_+$, opisanej układem równań

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (x-1)^2 + y^2 = z$$

i łączącej punkty $A(2,0,1),\ B(0,2,5)$

Zadanie 3. Dla krzywej łączącej punkty $A(0,0,0), B(1, \ln 3, \sqrt{\ln 5})$ obliczyć całkę skierowaną postaci

$$I_3 = \int_A^B \exp(y+z^2)\,dx + x\exp(y+z^2)\,dy + 2xz\exp(y+z^2)\,dz.$$

Zadanie 4. Znaleźć potencjał pola wektorowego o składowych

$$P = -\frac{2xy}{(x^2+z^2)^2},\ Q = \frac{1}{x^2+z^2} + 2y,\ R = -\frac{2yz}{(x^2+z^2)^2},$$

a następnie obliczyć jego całkę wzdłuż odcinka o początku w punkcie (1,1,1) i końcu (-1,-1,-1).

Zadanie 5. Dla zadanego ciągu funkcji $f_n \in C[a,b]$ wykazać mierzalność (wzgl. zbiorów borelowskich) zbioru tych $x \in [a,b]$, dla których ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny. (wsk.- zastosować warunek Cauchy'ego dla $\epsilon = \frac{1}{k}$)

Zadanie 6. Gdy szereg $\sum \int |f_n|\,d\mu$ jest zbieżny dla danego ciągu (f_n) funkcji mierzalnych, to wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ można całkować metodą wyraz po wyrazie i jest on również zbieżny w sensie normy $\|\ \|_1$.

Zadanie 7. Przy[uśćmy, że dla f nieujemnej, ciągłej i całkowalnej na $(-\infty, +\infty)$ (w sensie niewłaściwej całki Riemanna) mamy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Który spośród szeregów: $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} f(n^2t)\,dt$, $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} f(n^{-2}t)\,dt$ będzie zbieżny (i do jakiej sumy?),

Zadanie 8. Zbadać związek pomiędzy istnieniem skończonej całki niewłaściwej Riemanna oraz warunkiem $f \in \mathcal{L}^1(0,+\infty)$ dla funkcji ciągłej $f \in C(0,+\infty)$.

Zadanie 9. Zbieżność ciągu funkcji mierzalnych względem miary μ, oznaczana symbolem $f_n \xrightarrow{(\mu)} f_0$ oznacza, według definicji, zbieżność do zera ciągu $\mu(\{x : |f_n(x) - f_0(x)| > \epsilon\})$ dla każdego $\epsilon > 0$. Sprawdzić, że taka zbieżność zachodzi zawsze zawsze gdy albo $\|f_n\|_1 := \int |f_n|\,d\mu \to 0$, albo gdy miara μ jest skonczona, zaś $f_n \to f$ prawie wszędzie $[\mu]$. $*$ Żadnej z tych implikacji nie da się odwrócić.$*$

Zadanie 10. Gdy ciąg (f_n) jest zbieżny w $\mathcal{L}^1(\mu)$ względem $\|\ \|_1$, to można w pewnym jego podciągu uzyskać nierówności $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leqslant 2^{-k}$. Stosując wynik zadania 6. Wywnioskować, że pewien podciąg ciągu zbieżnego w normie $\|\ \|_1$ jest zbieżny prawie wszędzie (choć nie musi to zachodzić dla samego "pełnego" ciągu (f_n).