Egzamin poprawkowy z analizy matematycznej, 27.II'09

Zadanie 1. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$x_n := \sqrt[n]{n!}.$$

Wykazując najpierw nierówność $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ [lub w inny sposób] udowodnić, że kresem dolnym zbioru

$$B := \{\frac{1}{n^2}x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

jest liczba zero. Wykazać też, że $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$, czyli -że ciąg o wyrazach x_n nie jest ograniczony z góry.

Zadanie 2. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx\,, \qquad \int e^{2t} \sin t\, dt\,.$$

Zadanie 3. Znaleźć granice:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Zadanie 4. Przypuśćmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, przy czym $a_n \geqslant 0$. Wykazać, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest również zbieżny. Podać przykład wskazujący na konieczność założenia o nieujemności wyrazów a_n.

Wykazać rozbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln^2 n}\,.$$

Zadanie 5. Zbadać przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i przedziały wypukłości dla funkcji określonej wzorem

$$g(x) = x \exp(\frac{1}{x}).$$