Egzamin z analizy (rok I B WMS) *25. stycznia 2007*

Każde z zadań będzie oceniane w skali od 0 do 10 punktów. Czas pisania 110 minut.

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i taka, że

$$\forall_{q\in\mathbb{Q}}\, \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad f(x+2q) = f(x). \tag{$*$}$$

Wykazać, że f jest stała. Podać przykład f nieciągłej, spełniającej warunek (*).

Zadanie 2. Znaleźć granice ciągów $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$, gdzie

$$a_1 = 100, \;\; a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n}$$

$$b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n+4}.$$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \sin(n!),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Zadanie 4. Sprawdzić, czy istnieje liczba $\beta \in \mathbb{R}$, dla której funkcja g określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \beta & \text{dla } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$

(b) jest klasy C^2 w zbiorze $\mathbb{R}$ - odpowiednio.

Zadanie 5. Zbadać przebieg zmienności funkcji danej wzorem

$$f(x) = xe^{-|x-1|}.$$