

Egzamin z analizy (rok I B WMS) 20. marca 2007

Każde z zadań będzie oceniane w skali od 0 do 10 punktów. Czas pisania 110 minut.

Zadanie 1. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int (3x^2 + 1) \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx \quad \text{oraz} \quad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx.$$

Zadanie 2. Znaleźć granice

$$g_1 := \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^x \quad \text{oraz} \quad g_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{2-n} \right)^{2n}.$$

Zadanie 3. Zbadać, dla jakich liczb $x \in \mathbb{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \quad \text{a dla jakich } x \text{ - szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} x^n.$$

Zadanie 4. Sprawdzić, w jakich punktach jest ciągła, a w jakich - różniczkowalna funkcja określona wzorem

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1 - \cos x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (1)$$

Zadanie 5. Wyznaczyć dziedzinę, ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności dla funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$