Analiza Matematyczna-II semestr. Egzamin 9.VI'09

Zadanie 1. Obliczyć sumę i promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n x^n}{n(n+2)} + n x^{3n} \right).$$

Na jakich przedziałach $[a, b]$ jest on zbieżny jednostajnie?

Zadanie 2. Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [-n, n] \\ \frac{1}{n} e^{-|x|+n}, & x \in (-\infty, -n) \cup (n, +\infty), \end{cases}$$

a) Znaleźć funkcję $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$;

b) wykazać zbieżność jednostajną na całej prostej $\mathbf{R}$ ciągu f_n do f;

c) obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \quad$ oraz $\quad \lim_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 3. Obliczyć obwód i pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = \ln(1 - x^2)$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$, osią 0X oraz prostą $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 4. (20 min) Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne dla funkcji

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = e^{x_1}(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2), \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Zadanie 5. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+(\cos x - 1)y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

w punkcie $(0, 0)$. Sprawdzić czy F jest różniczkowalna w tym punkcie.
Czy F jest różniczkowalna w każdym punkcie $(x, y) \in \mathbf{R}^2$?