Zadanie 1. Zbadać różniczkowalność w $\mathbb{R}^2$ oraz istnienie pochodnych kierunkowych w punkcie (0,0) dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} .$$

Zadanie 2. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi zadanymi we współrzędnych biegunowych w następujący sposób:
$r = 2 + \cos 2\varphi$, $r = 2 + \sin\varphi$, $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 3. Wyznaczyć przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n+3)}{4^n} x^{2n}$; $\qquad$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$

Wyliczyć sumę pierwszego szeregu.

Zadanie 4. Wyznaczyć ekstrema lokalne dla funkcji danej wzorem:

$$u(x,y,z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$$

Zadanie 5. Jeśli mamy dany ciąg funkcji $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ciągłych dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ oraz takich, że dla każdego ciągu (x_n) zawartego w [0,1] i zbieżnego, mamy $\lim f_n(x_n) = f_0(x_0)$, gdzie $x_0 = \lim x_n$, wykazać zbieżność jednostajną tego ciągu do funkcji f_0. Uzasadnić, czy analogiczna teza będzie zachodzić, gdy odcinek $[0,1]$ zastąpimy przez pełną oś liczbową, $\mathbb{R}$?