Uwagi o opracowaniu zagadnień z teorii (II sem. analizy, WMS) w 2015

1. "Gdy $\lim \delta_n = 0$,to podział nazywamy normalnym" -chodzi o ciąg podziałów!

2. ograniczoność funkcji całkowalnych, -całkiem brak dowodu. Napisane nierówności dają tylko ograniczenia na całkę (stąd wynika tw. o wart. średniej). Ale w tym zapisie m, M -to kresy zbioru wartości f, więc właśnie mamy mykazać, że $M \neq +\infty, m \neq -\infty$, gdy f jest całkowalna. Np. gdy $M = +\infty$, w jednym z odcinków n-tego podziału są przyjjmowane dowolnie duże wartości. (trzeba pokazać, jak zmodyfikować już daną sumę częściową zmieniając tylko 1 punkt pośredni, by otrzymać wartość sumy np. większą od n

3. W punkcie 4. Definicja całki dolnej (i górnej), definicjaj jest zła - to są kresy zbioru wsszystkich sum górnych (odp. dolnych), a dopiero *twierdzenie Darboux* (=kryterium całkowalności) zawiera lemat o sumach dolnych dla ciągu normalnego podziałów, - że ich granicą jest całka dolna

4. Pierwsze twierdzenie *o wartości średniej* dla całek, -tu proszę też o tezę dla iloczynu 2 funkcji, gdy druga jest stałego znaku, a pierwsza ciągła (to jest wykorzystywane w dow. Wzoru Bonneta.

5. Drugie tw. o wartości średniej (*wzór Bonneta*),- W p. 12 -trzeba uzasadnić następną równość po zastosowaniu całkowania przez części (skąd wiemy, że istnieje taki punkt c. . W *kryterium Dirichleta* dla całek po wypisaniu wzoru Bonneta dla całki w granicach od β' do β'' są złe oszacowania całek z f na takim przedziale. (jako różnica $\int_a^{\beta''} f - \int_a^{\beta'} f$ och moduł jest $\leqslant 2M$. Jedynie β tak dobieramy, by wartości g miały mały moduł w przedzieale $[\beta, b)$.

6. *Wahanie całkowite*, krzywe prostowalne, ... Definicja dług. łuku krzywej -to nie granica ciągu łamanych wpisanych odp. normalnym ciągom podziałów odcinka parametryzującego, tylko supremum zbioru wszystkich. dług. łam. wpisanych w tę krzywą. 19. Przy rozkładzie Hahna $f \in BV[a, b]$ na różnicę $f_1 - f_2$ trzeba pokazać , że f_j są niemalejące, jak już się wypisuje dowód. Ale on ne jest obowiązkowy. Natomiast sama postać sum całkowych dla całki Stieltjesa -jest.. Oszacowanie modułu całki jest przez supremum $|f|$ **razy** (a nie minus) wahanie całkowite g .

7. *Iloczyn skalarny* $\langle f, g\rangle$ zdefiniowany dla $f, g \in R(a, b)$ przez całkę. Porównanie (=podanie nierówności typu $\|f\|_j \leqslant C\|f\|_k$) norm... -tu brakuje oszacowania $\|f\|_1$ przez $\|f\|_2$ razy $\sqrt{b-a}$ (z nierówności Cauchy'ego=Buniaowskiego - Schwarza dla iloczynu skalarnego (funkcji $x \mapsto |f(x)|$ przez stałą funkcję równą 1). *Całkowanie szeregów* wyraz-po wyrazie. - trzeba podać dowód, Zapisać $S(x)$ jako sumę (w punkcie x) szeregu, $S_k(x)$ -odp. sumę częściową, zaś s_k- sumę częściwą szeregu całek. Należy wykazać, że s_k zmierza do całki $\int_a^b S(x)\, dx$ Z linnnniowości całki, s_k równa się całce z S_k, następnie szacujemy moduł z całki $S(x) - S_k(x)$ przez normę (nie nazywajmy jej "taksówkową" tylko "normą L^1) : $\|S - S_k\|_1$, a tę ostatnią -przez normę supremową... (Określenie "norma taksówkowa " ma sens tylko w $mathbbR^n$, zwłąszcza dla $n = 2$, gdzie dodajemy moduły różnic wszystkich współrzędnych. Symbol jest ten sam -tylko,że w naszej sytuacji sumowaniu odpowiada cakowanie

8. Proszę nie używać symbolu $C_0(\Omega)$ na oznaczenie zbioru funkcji ciągłych i ograniczobnych, tylko $C_b(\Omega)$. Ten pierwszy symbol oznacz inną przestrzeń ("funkcji znikających w nieskończoności" gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$

9. Twierdzenie *o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi* , Zupełność przestrzeni $C^1[a, b]$ -zauważyłem, że sprawiają zdającym kłopot. Wystarczy dobrze zrozumieć dowód (wykorzystujemy już zupełność C[a,b] i wzór Newtona-

Leibniza, gdy pod całką umieścimy pochodną z funkcji (lub z $f_n - f_k$) i przejście do granicy jednostajnej pod znakiem całki.

10. Szereg potęgowy -*promień i koło zbieżności*,Uwaga! Na ogół nie jest prawdą, że we wzorze na odwrotność promienia zbieżności można zamiast $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ -granicę górną ilorazów $\frac{|a_{n+1}}{a_n}$, co niektórzy próbują zasugerować . Jedynie gdy istnieje granica ciągu tych ułamków - to owszem, ale wówczas one są równe (z granicą wyrażoną przez pierwiastki).

    Zasadnicze Twierdzenie Algebry. -dowód jest bardiej elementarny, nie dowodziliśmy twierdzenia Liouville'a, tylko w przypadku, gdyby wielomian był bez pierwiastków, na pewnym kole osiągnął by minimum modułu - i tu szacując odpowiednie wyrazy po sprowadzeniu do prostszego przypadku -otrzymamy sprzeczność. Dowód jest taki, jak w książce W.Rudina -tylko tam w jednym miejscu zamiast minusa ma być znak plus.

    Nierówność Bessela dla układów ortogonalnych.(wystarczy dla ortonormalnych. Jest parę "literówek": dla uproszczenia lepiej za zbiór indeksów szeregu fpuriera względem 'abstrakcyjnego układu ortonormalnego" brać $\mathbb{N}$, a nie $\mathbb{Z}$. Nad symbolem sumy już nie ma być żadnego n. Symbol $S_k - S_k[f]$ w dalszych linijkach "zgubił" indeks k, on tam stale musi być. Relacja prostopadłości $S_k(f) - f$ do wektorów e_n ma miejsce tylko dla $n \leqslant k$, nie dla wszystkich n. -ale tylko takie występują kako wektory generujące S_k, stąd faktycznie $f - S_k \perp S_k$. Dla f całkowalnych z kwadratem z nierównosci Bessela wynika w szczgólności zbieżność ciągu współczynników f do zera (lemat Riemanna-Lebesgue'a uogólnia to na przypadek f, dla których całka (tu -całka niewłaściwa) z modułu f jest skończona).

    tw. Dirichleta (zarys dow.) -nawet zarysu brak (na jakich faktach się opieramy, jaki wzór wyraża sumy częściowe $S_k[f](x)$? Jakie włąsności ma jądro całki Dirichleta, $D_k(t)$? Jak brzi tw. o granicy przy $n \to \infty$ z całek w przedziale od 0 do a z $f(x)\frac{\sin(nx)}{x}\,dx$ fla f monotonicznej?

11. Różniczka złożenia i jej postać macierzowa. -w definicji brakuje w Państwa opracowaniu postulatu, by odwzorowanie "L" było liniowe! Ustalmy jedno: **Nikt, kto nie zna poprawnej definicji różniczkowalności i nie potrafi zapisać postaci wartości różniczki odwzorowania na danym wektorze $h \in \mathbb{R}^n$ nie może zdać egzaminu ustnego. (nie jest to "WKW", ale "WK")**.

12. Warunki na istnienie *ekstremów lokalnych* (np. maksimum) dla $f \in C^2(\Omega)$. -w dowodzie oznaczenie drugiej różniczki pomylone z oznaczeneim pierwszej (brak indeksu górnego 2 nad "d"). Co gorsza, całkiem brakuje uzasadnienia, dlaczego różniczka jest dodatnio określona również w pewnym otoczeniu punktu P_0, jeśli założymy klasę C^2 oraz dodatnia określoność reugiej różniczki w punkcir P_0.

13. Równanie *płaszczyzny stycznej* do wykresu (=do powierzchni $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in \Omega\}$) -szkic uzasadnienia. -tu brakuje jakiejś definicji geometrycznej pojęcia styczności do powierzchni.