

## Zagadnienia do egzaminu z analizy semestr I , 2016/17

1. Przekroje Dedekinda: wymierne, niewymierne (definicje, przekrój definiujący  $\sqrt{2}$ , definicja  $\mathbb{R}$ , istnienie  $\sqrt[n]{x} \forall x > 0, n \in \mathbb{N}$ ).
2. Pojęcia relacji porządku w zbiorze, majoranty, kresu. Liniowość relacji porządku w  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Istnienie kresów zbiorów niepustych, ograniczonych  $E \subset \mathbb{R}$ .
3. Gęstość  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$ , moduł liczby rzeczywistej (definicja przekroju  $-x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ), działania  $+, \cdot$  w  $\mathbb{R}$ . Nierówność trójkąta (I,II).
4. Definicja granicy ciągu -twierdzenia: o jednoznaczności granicy, o granicy ciągu monotonicznego, o ograniczoności ciągu zbieżnego.
5. Nierówności: Bernoulli'ego, „AGH” (w tym: lemat  $1 = x_1 \cdot \dots \cdot x_n, x_j > 0 \Rightarrow \dots$ )
6. Definicja podciągu, tw. o podciągu ciągu zbieżnego, zbiór punktów skupienia ciągu, tw. Bolzano-Weierstrassa (dowolnie wybrany dowód)
7. Niezależność granicy od skończonej ilości wyrazów, tw.: o 3 ciągach, o przechodzeniu do granicy z nierównościami i o zachowaniu ostrych nierówności między granicą ciągu a daną liczbą (dla prawie wszystkich wyrazów).
8. Granice niewłaściwe ciągów, tw. o arytmetyce granic (przypadek gran. właściwych i ogólny). Granice ciągów: geometrycznego, ciągów:  $\sqrt[n]{n}, (1 + \frac{1}{n})^n$
9. Warunek wystarczający, by  $\lim a_n = 0$  [odp.  $\lim a_n = +\infty$ ] sformułowany z użyciem  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Granice  $\frac{a^n}{n^k}, (\sqrt{n!})/n$ .
10. Twierdzenie Stolza o granicy ilorazów dwóch ciągów (wniosek -tw. Cauchy'ego o granicy średnich arytmetycznych)
11. Warunek Cauchy'ego a zbieżność ciągu (w  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Def.  $\limsup, \liminf$ , tw. o ostrych nierównościach: ciągi, dla których  $\limsup a_n > \alpha$  (odp.  $< \beta$ ). Wyrażenie granicy górnej przez kresy końcówek ciągu
12. Definicja szeregu liczbowego, typy zbieżności szeregu, tw. o zbieżności szer. bezwzględnie zbieżnego, kryterium porównawcze (dla  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , gdzie  $a_n \in \mathbb{C}$ ).
13. Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego, porównanie ich stosowalności (nierówności  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \dots$  dla  $a_n > 0$ )
14. Tw. Cauchy'ego o zagęszczaniu, zbieżność  $\sum \frac{1}{n^\alpha}, \sum \frac{1}{n \ln n}$ .
15. Tw. o bezwarunkowej zbieżności szeregów bezwzględnie zbieżnych. Sformułowanie (bez dow.) tw. Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.
16. Iloczyn szeregów (definicja formalna, tw. Mertensa (bez dow.), zastosowanie do  $\exp(z+w)=\dots$
17. Suma szeregu  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}$ , -jej porównanie z  $\lim(1 + \frac{1}{n})^n$ . Niewymierność  $e$ .
18. Ustawienie  $\mathbb{Q}$  w ciąg, tw. Cantora o nieprzeliczalności  $[0, 1]$ .
19. Kryterium Dirichleta, zastosowanie do  $\sum \frac{\sin n}{n}$
20. Definicja otoczeń, zbiorów otwartych i zbiorów domkniętych w  $\mathbb{R}$  i na płaszczyźnie. Charakteryzacja domkniętości zbioru  $A$  przez pewien warunek dotyczący granic ciągów (zbieżnych)  $(a_n) \subset A$ , definicja punktów skupienia zbioru.
21. Def. granicy funkcji w punkcie. Dowód równoważności z warunkiem Heinego.

22. Elementarne własności granic: jednoznaczność granicy, ograniczoność funkcji w pewnym otoczeniu, tw. o 3 granicach, o przechodzeniu do granicy z nierównościami i o zachowaniu ostrych nierówności między granicą a daną liczbą -dla punktów z pewnego sąsiedztwa, „arytmetyka granic”. Granica złożenia funkcji
23. Istnienie i równość granic jednostronnych a istnienie granicy, istnienie granic jednostronnych dla funkcji monotonicznych. Granice niewłaściwe, asymptoty,
24. Ciągłość funkcji (w punkcie  $x_0$ ) i na zbiorze. tw.: Zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest co najwyżej przeliczalny.
25. Tw. Bolzano -Darboux. Wn. o monotoniczności  $f \in C[a, b]$  różnowartościowych
26. Tw. Weierstrassa o osiągnięciu kresów na zbiorach domkniętych i ograniczonych
27. Pojęcie jednostajnej ciągłości: porównanie z warunkiem Lipschitza, Tw. Cantora (z dowodem). Tw. o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej do funkcji ciągłej na domknięciu dziedziny (tylko szkic idei dowodu)
28. Ciągłość funkcji elementarnych, podstawowe granice: (przy  $x \rightarrow 0$ )  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $a^x$ , (monotoniczność funkcji wykładniczej). Funkcje odwrotne -ciągłość : logarytm, funkcje cyklometryczne, połowe (odwrotne do  $\sinh x$ , ...)
29. Granice (ilorazów różnicowych w punkcie  $x_0 = 0$ ) związane z funkcjami  $\log_a(1+x)$ ,  $a^x$ ,  $\sinh x$ . Granice przy  $x \rightarrow +\infty$  dla  $\frac{a^x}{x^k}$ ,  $\frac{\log_a x}{x}$
30. Różniczkowalność: pochodna, różniczka, interpretacja geometryczna (proste: sieczna, styczna do wykresu), symbole Landaua.
31. Pochodne: sumy, iloczynu, ilorazu, pochodna złożenia funkcji,
32. Pochodna funkcji odwrotnej pochodne funkcji potęgowej, sinus, wykładniczej, logarytmu, arc cos, arc sin
33. Ekstremum lokalne, tw. Fermata, warunki wystarczające istnienia ekstremum
34. Tw. o wartości średniej: (Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego) (+ przykłady wskazujące na konieczność założeń)
35. Wnioski z tw. o wart. średniej: Pochodna  $\equiv 0 \Rightarrow f$  jest lokalnie stała, warunek Lipschitza a ograniczoność pochodnej (Tw. o przyrostach skończonych), znak pochodnej a monotoniczność, własność Darboux dla pochodnej.
36. Reguła de l'Hospitala
37. Pochodne wyższych rzędów.  $(a^x)^{(n)}$ ,  $(x^k)^{(n)}$ ,  $\sin^{(n)}$ . Wzór Leibniza (bez dow.)
38. Wielomian Taylora, tw. Peano o reszcie we wzorze Taylora, zastosowanie do war. wystarczającego na istnienie ekstremum lokalnego
39. Reszta w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a (jeden z dowodów , np. wystarczy dla reszty w postaci Lagrange'a), zastosowanie do oszacowania będu przybliżenia
40. Funkcje wypukłe: wkw w terminach ilorazów różnicowych, zastosowanie do kryterium wypukłości  $f$  różniczkowalnych, punkty przegięcia, ciągłość  $f$  wypukłych.
41. Def. i podstawowe własności całki nieoznaczonej. Tw. o całkowaniu przez podstawienie i przez części.
42. Wyprowadzenie wzorów rekurencyjnych dla  $\int \sin^n(x) dx$ ,  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ .