

## 10 Szeregi i pochodne

Ciągi funkcyjne jednostajnie zbieżne do zera mogą mieć rozbieżne ciągi pochodnych (nawet w sensie punktowym): Tak jest np. dla  $\phi_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \rightrightarrows 0$ , gdzie  $|\phi'_n(k\pi)| \rightarrow \infty$ . Z kolei, dla  $f_n(x) := \frac{x}{1+n^2 x^2} \rightrightarrows 0$  na odcinku  $[-1, 1]$ , mamy  $f'_n(x) = \frac{1-n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2}$ , więc  $f'_n(0) = 1 \not\rightarrow 0$ , chociaż  $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0$ .

Jeśli w przestrzeni  $C^1[a, b]$  funkcji mających ciągłe pochodne w przedziale  $[a, b]$  jako normę przyjelibyśmy  $\|f\|_{[a, b]} = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ , to nie znajdziemy takiej stałej  $M \in \mathbb{R}_+$ , dla której każda  $f \in C^1[a, b]$  mogła by spełniać oszacowanie  $\|f'\|_{[a, b]} \leq M \|f\|_{[a, b]}$ , co jest warunkiem ciągłości dla operatora liniowego  $f \mapsto f'$  (czyli operatora różniczkowania). Nierówność

$$\|f'\|_{[a, b]} \leq M \|f\|_{C^1[a, b]}$$

otrzymamy, nawet ze stałą  $M = 1$ , jeśli do normy supremum modułu z  $f$  dodamy wyrażenie z lewej strony tej nierówności (to więcej, niż oczywiste). Ale to może za dużo? -tak, za dużo, trzeba dodać tę całą lewą stronę, ale do modułu z  $f$  w jakimś punkcie -najwygodniej - w lewym końcu przedziału.

Zdefiniujmy więc normę w przestrzeni wektorowej  $C^1[a, b]$  wzorem

$$\|f\|_{C^1[a, b]} := |f(a)| + \sup\{|f'(t)| : t \in [a, b]\} \quad \text{czyli} \quad |f(a)| + \|f'\|_{[a, b]}. \quad (1)$$

Czy więc informacja o  $f$  tylko w "punkcie początkowym" plus informacja o pochodnej -już w całym przedziale -to wystarczające dane do kontrolowania zbieżności jednostajnej np. ciągu funkcji oraz ich pochodnych? Tak, odpowiedź można np. uzasadnić przytaczając wzór Newtona-Leibniza w postaci

$$h(x) = h(a) + \int_a^x h'(t) dt \quad \text{dla} \quad h \in C^1[a, b]. \quad (2)$$

Zobaczymy, jak to działa w dowodzie następującego twierdzenia:

**Twierdzenie.**(O ZBIEŻNOŚCI WRAZ Z POCHODNYMI) Jeśli ciąg pochodnych  $f'_n$  funkcji  $f_n \in C^1[a, b]$  jest zbieżny jednostajnie w  $[a, b]$  do pewnej funkcji  $g$ , zaś ciąg  $f_n(a)$  jest zbieżny, to ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji  $f \in C^1[a, b]$  oraz  $f' = g$ .

**Dowód.** Aby wykazać zbieżność jednostajną, sprawdzimy jednostajny warunek Cauchy'ego. We wzorze (2) w miejsce  $h$  wstawmy funkcję  $f_m - f_k$ . Otrzymamy dla jej modułu w każdym punkcie  $x \in [a, b]$  równość:  $|f_m(x) - f_k(x)| =$

$$= |f_m(a) - f_k(a) + \int_a^x (f_m(t) - f_k(t)) dt| \leq |f_m(a) - f_k(a)| + \int_a^x |f_m(t) - f_k(t)| dt.$$

Korzystalismy tu z nierówności trójkąta i z całkowitej nierówności trójkąta (wstawiając moduł pod całkę). Ustalmy  $\epsilon > 0$ . Dla  $m, k$  dostatecznie dużych (powiedzmy, dla  $m, k \geq M_1$ ) mamy  $|f_m(a) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ , gdyż ciąg liczbowy zbieżny  $(f_n(a))$  musi spełniać warunek Cauchy'ego. Wystarczy sprawdzić, czy drugi składnik, czyli całka będzie też mała dla  $m, k$  dostatecznie dużych. Jednostajny warunek Cauchy'ego, jaki spełnia ciąg pochodnych (bo jest on, z założenia, jednostajnie zbieżny), daje nam mniejszą od  $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$  jednostajną majorantę:

$$\|f'_m - f'_k\|_{[a, b]} < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

dla  $m, k$  dostatecznie dużych (np. dla  $m, k \geq M_2$ ). Ponieważ jest to majoranta dla funkcji podcałkowej, a długość drogi całkowania, to  $|x - a| \leq b - a$ , więc  $\int_a^x |f'_m(t) - f'_k(t)| dt \leq (b - a) \|f'_m - f'_k\|_{[a, b]} \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Dla  $m, k \geq \max(M_1, M_2)$  i dla wszystkich  $x \in [a, b]$  mamy więc  $|f_m(x) - f_k(x)| \leq \epsilon$ , czyli jednostajny warunek Cauchy'ego. Ciąg  $(f_n)$  jest więc jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji

ciągłej  $f$ . Wykażemy równocześnie, że  $f$  jest różniczkowalna, klasy  $C^1$  i że jej pochodną jest  $g = \lim f'_n$  w następujący sposób:

Ponownie skorzystajmy z (2), tym razem w miejsce  $h$  wstawiając  $f_n$ . Tak więc

$$\forall_{x \in [a,b]} f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad (3)$$

Wiemy już, że  $f_n \Rightarrow f$  w  $[a, b]$ , w szczególności, zbieżność jest też punktowa. Przechodząc z  $n$  do nieskończoności w równościach (3) (i wykorzystując twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki w przypadku zbieżności jednostajnej, gdyż z założenia,  $f'_n \Rightarrow g$ ) otrzymamy w granicy równości

$$\forall_{x \in [a,b]} f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt. \quad (4)$$

Dzięki fragmentowi twierdzenia Newtona-Leibniza w punktach ciągłości funkcji  $g$  (czyli wszędzie na odcinku  $(a, b)$ ) otrzymamy istnienie pochodnej z prawej strony wzoru (4) równej  $g(x)$ , stąd i pochodna po lewej stronie istnieje oraz  $\frac{d}{dx} f = g$  przynajmniej w przedziale otwartym  $(a, b)$ . Z ciągłości  $g$  na końcach przedziału dostaniemy też (był taki wniosek z Tw. Lagrange'a w I semestrze) istnienie pochodnych 1-stronnych w punktach  $a, b$  z funkcji  $f$ , równych  $g(a)$  (odp.  $g(b)$ ). To kończy dowód.  $\square$

Można też podać inny (częściej spotykany w podręcznikach) dowód powyższego twierdzenia, korzystający bezpośrednio z twierdzenia o przyrostach. Np zamiast szacować całkę  $\int_a^x (f'_m(t) - f'_k(t)) dt$  równą  $|(f_m(x) - f_k(x)) - (f_m(a) - f_k(a))|$  szacujemy ten ostatni przyrost przez  $|x - a| \|f'_m - f'_k\|_{[a,b]}$ . Potem, mając już wykazaną zbieżność jednostajną, należy szacować różnicę między ilorzem różnicowym dla  $f$  w punkcie  $x$  a wartością  $g(x)$ . Jak ktoś nie lubi całek, można i tak. (warto dla treningu spróbować)

Zamiast punktu  $a$  można też wybrać dowolny inny punkt  $c \in [a, b]$  i zakładać zbieżność ciągu  $(f_n(c))$ , dostając analogiczną tezę (i prawie taki sam dowód).

Odnotujemy dwa podstawowe wnioski z poprzedniego twierdzenia.

**Twierdzenie.** (O RÓŻNICZKOWANIU SZEREGÓW) Szereg funkcji klasy  $C^1$  można różniczkować metodą "wyraz po wyrazie", o ile przynajmniej w jednym punkcie jest on zbieżny, zaś szereg jego pochodnych jest zbieżny jednostajnie. Dokładniej, zakładamy zbieżność szeregu  $S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$  oraz jednostajną zbieżność w przedziale  $[a, b]$  szeregu pochodnych:  $G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ . Wówczas szereg jest zbieżny jednostajnie oraz pochodna  $S'(x)$  z funkcji  $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest równa  $G(x)$ . (Na końcach przedziału pochodne traktujemy jako jednostronne.) Innymi słowy, przy powyższych założeniach operacje: sumowania szeregu oraz różniczkowania można wykonywać w dowolnej kolejności. W szczególności, jak już wiemy, szeregi potęgowe postaci  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  są zbieżne jednostajnie wraz z pochodnymi w przedziałach  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , gdzie  $r$  jest dowolną liczbą dodatnią silnie mniejszą od promienia zbieżności  $R$ . Takie przedziały pokrywają cały przedział otwarty  $(x_0 - R, x_0 + R)$  i w tym przedziale zachodzi równość

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

**Dowód.** Oznaczmy przez  $S_k$  sumy częściowe:  $S_k := \sum_{n=0}^k f_n$  (w zapisie bezargumentowym). Założenia, to zbieżność  $S_k(a) \rightarrow S(a)$  oraz zbieżność jednostajna  $S'_k \Rightarrow G$ . Ta ostatnia faktycznie zachodzi, bo  $S'_k = \sum_{n=0}^k f'_n$ , skoro pochodna (sumy skończonej), to suma pochodnych. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że istnieje granica jednostajna:  $S = \lim S_k$  oraz jest ona klasy  $C^1$ , przy czym  $S' = G$ . Zauważmy jeszcze, że jak w twierdzeniu dla ciągów, punkt, w którym zakładamy zbieżność szeregu może być dowolny (niekoniecznie równy  $a$ ). Na przykład, dla szeregu potęgowego najwygodniej jest zamiast  $x_0 - r$  wybrać punkt  $x_0$ , bo w tym punkcie z wyjątkiem  $a_0$ , wszystkie wyrazy szeregu zerują się, zbieżność jest tu ewidentna. Zbieżność jednostajną otrzymaliśmy dla szeregu pochodnych z M-testu Weierstrassa (por. poprzedni wykład).

Aby siebie (a przede wszystkim Państwa) nie przeciążać -bo to podobno osłabia odporność, dowód poniższego twierdzenia napiszę następnym razem!

**Twierdzenie Abela:** Jeżeli szereg potęgowy o środku  $x_0$  i promieniu zbieżności  $R \in (0, +\infty)$  jest zbieżny w którymś z punktów  $x_0 \pm R$  (na krańcu przedziału zbieżności), to jego suma jest funkcją ciągłą w tym punkcie, szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku łączącym ten punkt z punktem  $x_0$ .

Jako zastosowanie, możemy wykazać, że  $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ . Promień zbieżności szeregu potęgowego geometrycznego  $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^{\infty} (-x)^n$  wynosi 1, więc w przedziałach  $[-r, r]$  dla  $r < 1$  jego zbieżność jest jednostajna i możemy tam całkować szereg wyraz po wyrazie, otrzymując dla  $0 < x < 1$  rozwinięcie  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_0^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_0^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ . Z twierdzenia Abela wyniknie, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \sum_1^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

co daje naszą równość.

Szereg potęgowy  $\sum_0^{\infty} (-x^2)^n$  o sumie  $\frac{1}{1+x^2}$  możemy całkować stronami na przedziałach  $[0, x]$  dla  $|x| < 1$ , otrzymując rozwinięcie  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$ . Dzięki twierdzeniu Abela ten wzór możemy też stosować w punkcie  $x = 1$ , otrzymując ciekawe przedstawienie liczby  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 10.1 Szereg Taylora i Maclaurina

Jak widać, niektóre funkcje można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego stosując całkowanie lub różniczkowanie szeregu potęgowego geometrycznego  $\sum x^n$  (z ewentualnymi podstawieniami w miejsce zmiennej  $x$  jakiegoś prostego wielomianu). Ale w ogólnym przypadku niełatwo jest znaleźć tą metodą współczynniki rozwinięcia. Na szczęście, jest inny sposób: Przypuśćmy, że promień zbieżności dla szeregu  $s(x) := \sum a_n (x-x_0)^n$  jest dodatni. Podstawianie wartości  $x = x_0$  do tego rozwinięcia funkcji  $s(x)$  a następnie do jej pochodnych rzędu  $k$  daje równości:  $s(x_0) = a_0, s'(x_0) = a_1, \dots, s^{(k)}(x_0) = k!a_k$ , gdyż w takim rozwinięciu wszystkie -z wyjątkiem jednego (dla  $n = k$ ) składniki zerują się w punkcie  $x_0$ . Jeśli więc tylko  $f(x)$  jest sumą typu  $s(x)$  -czyli sumą jakiegoś szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  do  $f$ , to musi już być  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ . Szereg potęgowy o takich współczynnikach nazwiemy *szeregiem Taylora w punkcie  $x_0$  dla funkcji  $f$* . W przypadku  $x_0 = 0$  szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Jeśli tylko 0 należy do wnętrza dziedziny  $f$ , to najprostszą i najczęściej używaną jest właśnie taka postać. Rzecz jasna, wymaga to znajomości poszczególnych pochodnych w punkcie 0. Dla niektórych funkcji są na to proste wzory: np. dla  $f(x) = e^x$  wszystkie pochodne są równe  $e^x$ , a w zerze przyjmują wartość 1. Dla funkcji sinus pochodne rzędu  $k$  w zerze zerują się dla  $k$  parzystych i są równe  $(-1)^m$  dla  $k = 2m + 1$ . Podobnie,  $\cos^{(k)}(0) = (-1)^j$  gdy  $k = 2j, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , zerując się dla  $k$  nieparzystych. Tu promieniem zbieżności jest  $+\infty$ . Dla funkcji  $\ln(1+x)$  promień zbieżności szeregu Maclaurina wynosi 1. Jak już wiemy, wszystkie te szeregi mają sumy równe rozwijanym funkcjom wewnątrz obszaru zbieżności. Można więc zapisać:

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Teraz wyjaśnię, dlaczego wprowadziłem na początku symbol  $s(x)$  dla sumy szeregu Taylora. Może się zdarzyć, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji  $f$  wynosi  $+\infty$ , lecz mimo to  $f(x) \neq s(x)$  dla  $x \neq x_0$ .

**Przykład** Tak jest w przypadku funkcji  $\phi(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$  dla  $x \neq 0$ , oraz  $\phi(0) := 0$ . Wszystkie jej pochodne w punkcie 0 istnieją (na wykładzie wykazałem to dla  $k = 1$ , lecz są równe zero, więc szereg Maclaurina dla  $\phi$  ma same zerowe współczynniki,  $s(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Natomiast  $\phi(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ .

Nasuwa się pytanie: „kiedy jest źle, a kiedy dobrze” w sensie równości pomiędzy funkcją klasy  $C^\infty$  i jej sumą szeregu Taylora? Odpowiedź wymaga osobnej teorii, podamy jedynie definicję:

**Definicja** Mówimy, że funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest analityczna (dokładniej,  $\mathbb{R}$ -analityczna) na zbiorze otwartym  $D \subset \mathbb{R}$ , jeżeli dowolny punkt  $x_0 \in D$  ma otoczenie, w którym  $f$  jest równa sumie jakiegoś szeregu potęgowego. (Jak już wiemy, ten szereg musi być wówczas jej szeregiem Taylora.)

Ponieważ szereg potęgowy (mając wówczas dodatni promień zbieżności  $R$ ) jest zbieżny także poza osią rzeczywistą, dla  $z \in \mathbb{C}$  leżących w kole  $|z - x_0| < R$ , funkcje analityczne można przedłużyć na pewne otoczenie  $\Omega$  zbioru  $D$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Gdy  $R = \infty$ , (np. dla  $\exp, \sin, \cos$ , sumując szereg Taylora otrzymamy przedłużenie tych funkcji dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ . Porównując szeregi Maclaurina dla funkcji  $\exp(ix), x \in \mathbb{R}$  z rozwinięciami funkcji trygonometrycznych, Euler doszedł do swego słynnego wzoru:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ten dalszy fragment nie zawiera treści obowiązujących, ale warto go przejrzeć, choćby z ciekawości

Funkcje analityczne na otwartych podzbiorach  $\Omega$  płaszczyzny zespolonej definiujemy analogicznie -jako równe sumie szeregów potęgowych w pewnych otoczeniach (w  $\mathbb{C}$ ) każdego punktu ze zbioru  $\Omega$ . Aby odróżniać te funkcje, zmienna w przypadku rzeczywistym oznaczamy symbolem  $x, t$  lub  $\varphi$ , zaś w przypadku zespolonym -jednym z symboli:  $z, w, \lambda, \zeta$ . Można wykazać, że poza przypadkiem funkcji stałych, funkcja analityczna  $f(z)$  nie może przyjmować wyłącznie wartości rzeczywistych w otoczeniu (zespolonym) żadnego punktu.

Ponadto przedłużenia analityczne funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznych na dany obszar  $\Omega$ , o ile istnieją, są wyznaczone jednoznacznie.

Innym warunkiem równoważnym analityczności jest istnienie w każdym punkcie  $z_0 \in \Omega$  granicy przy  $|z - z_0| \rightarrow 0$  z ilorazów różnicowych:  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ , nazywanej pochodną zespoloną w tym punkcie i oznaczanej symbolem  $f'(z_0)$ .

Analityczne są np. wielomiany postaci  $p(z) = \sum_0^m a_k z^k$ , funkcje wykładnicze, trygonometryczne powstałe przez rozszerzenie odpowiednich funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznych na pewne obszary w  $\mathbb{C}$ .

Suma, iloczyn, iloraz (poza miejscami zerowymi mianownika) dwu funkcji analitycznych w  $\Omega$  jest również analityczna. Również funkcje odwrotne do iniekcji analitycznych i granice jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji analitycznych-są analityczne. Przy tym obraz zbioru otwartego w  $\mathbb{C}$  przez funkcję analityczną różną od stałej -jest zawsze otwarty.

Można wykazać, że gdy jakieś koło  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  zawiera się w dziedzinie funkcji analitycznej, to promień zbieżności jej szeregu Taylora w punkcie  $z_0$  wynosi nie mniej, niż  $R$ . Jest więc inaczej, niż w  $\mathbb{R}$ . Na przykład, dziedziną funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznej  $\frac{1}{1+x^2}$  jest  $\mathbb{R}$ , lecz promień jej szeregu Maclaurina wynosi 1, gdyż w takiej odległości od punktu 0 znajdują się liczby  $\pm i$  -miejsca zerowe mianownika. (Jednoznacznym przedłużeniem analitycznym jest tu funkcja  $\frac{1}{1+z^2}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ , jej dziedzina nie może objąć tych miejsc zerowych mianownika, bo np. przy  $|z - i| \rightarrow 0$  mamy  $|f(z)| \rightarrow +\infty$ .)

Suma szeregu potęgowego o dodatnim promieniu zbieżności jest analityczna we wnętrzu obszaru zbieżności (czyli w kole otwartym o środku  $z_0$  i promieniu  $R$  równym promieniowi zbieżności). Ale dowód jest dość żmudny -polega na "przesuwaniu punktu rozwinięcia w szereg" (tu punktu  $z_0$ ) do punktu z pewnego otoczenia.