Zagadnienia z teorii (II sem. analizy, WMS) w 2015

1. Definicja *całki Riemanna*, przykład f niecałkowalnej ograniczonej, ograniczoność funkcji całkowalnych, sumy całkowe Darboux (dolne i górne), ich zachowanie po rozdrobnieniu podziału.
2. Definicja całki dolnej (i górnej), *twierdzenie Darboux* (=kryterium całkowalności) i lemat o sumach dolnych dla ciągu normalnego podziałów, *kryterium Riemanna* całkowalności funkcji ograniczonej.
3. Dowód *całkowlaności funkcji ciągłych.* Całkowalność *sumy i iloczynu* funkcji całkowalych
4. Pierwsze twierdzenie *o wartości średniej* dla całek, tw. *Newtona-Leibniza*
5. *Kryterium porównawcze* zbieżności całki niewłaściwej.
6. *Kryterium całkowe* zbieżności szeregów.
7. Drugie tw. o wartości średniej (*wzór Bonneta*), *kryterium Dirichleta* dla całek
8. *Tw. o przyrostach* dla funkcji o wartościach wektorowych $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, wzór na pochodną długości łuku krzywej, wzór na *długość łuku* krzywej. Przykład krzywej nieprostowalnej.
9. *Wahanie całkowite*, krzywe prostowalne, norma przestrzeni $BV[a, b]$, oszacowanie wahania dla funkcji monotonicznych i dla funkcji klasy C^1, lub spełniających warunek Lipschitza. Definicja *całki Riemanna-Stjeltjesa* $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ w przypadku f ciągłej, $g \in BV[a, b]$ (bez dowodów zbieżności sum całk.).
10. *Iloczyn skalarny* $\langle f, g\rangle$ zdefiniowany dla $f, g \in R(a, b)$ przez całkę. Porównanie (=podanie nierówności typu $\|f\|_j \leqslant C\|f\|_k$) norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt$, $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$ oraz $\|f\|_{[a,b]} := \sup_{[a,b]} |f|$, ciągłość funkcjonału $f \mapsto \int_a^b f(t)\, dt$ względem tych norm. *Całkowanie szeregów* wyraz-po wyrazie.
11. Zupełność przestrzeni $C[a, b]$ oraz $B(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f\|_\Omega < \infty\}$ z normą $\|f\|_\Omega := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.
12. Zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ spełniających warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ *(bezwzględnie zbieżnych)* w przestrzeni Banacha, „*Test majorant*" Weierstassa.
13. Twierdzenie *o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi* (zbieżność $f_n(a)$ i zbieżność jednost. $f_n' \rightrightarrows g$ w $[a, b]$ implikują zb. jednost. $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f \in C^1[a, b],\ f' = g$.) Zupełność przestrzeni $C^1[a, b]$
14. Szereg potęgowy -*promień i koło zbieżności*, zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności.
15. *Twierdzenie Abela* o szeregach potęgowych zbieżnych na końcu przedziału zbieżności, zastosowanie do przedstawienia $\ln 2$ jako $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
16. Definicja zbiorów *zwartych,* charakteryzacja zwartych podzbiorów w $\mathbb{R}^n$, "warunek pokryć skończonych" -jego dowód dla $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ograniczoność i osiąganie maksimum przez funkcje ciągłe na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^n$.
17. *Zasadnicze Twierdzenie Algebry.*
18. Twierdzenie Pitagorasa dla normy określonej przez iloczyn skalarny. *Lemat o współczynnikach* wektora $g = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$ względem układu ortonormalnego (e_n). *Nierówność Bessela* dla układów ortogonalnych.
19. Ortogonalność układu trygonometrycznego (rzeczywistego i w postaci zespolonej), *szereg Fouriera* - wzory na współczynniki i na sumy częściowe, *tw. Dirichleta* (zarys dow.)

20. *Twierdzenie Fejéra*, *zupełność* układu trygonometrycznego.

21. Zbieżność szeregu Fouriera $S[f]$ (średniokwadratowa). *Tożsamość Parsevala.*

22. Granice iterowane. Pierwsze *tw. o granicy podwójnej*, jakiś przykład braku równości 2 granic iterowanych.

23. Pochodne cząstkowe a *różniczkowalność funkcji* n zmiennych (Tw.: ciągłość wszystkich pochz. cząstkowych $\partial f/\partial x_j \Rightarrow$ różniczkowalność f), definicja $C^1(\Omega)$.

24. Różniczka złożenia i jej postać macierzowa. Dowód „*Reguły Łańcucha*".

25. *Pochodne kierunkowe* (jednostronne), ich związki z gradientem, *twierdzenie o wartości średniej i o przyrostach.*

26. Druga różniczka, macierz Hessego, szkic dowodu twierdzenia *o symetrii drugiej różniczki* funkcji klasy C^2.

27. *Wzór Taylora* z resztą Lagrange'a (wyprowadzenie dla rzędu 2, w przypadku 2 zmiennych).

28. Warunki na istnienie *ekstremów lokalnych* (np. maksimum) dla $f \in C^2(\Omega)$.

29. Równanie *płaszczyzny stycznej* do wykresu (=do powierzchni $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$) -szkic uzasadnienia. *Wektor normalny.*

30. Otwartość zbioru macierzy nieosobliwych i ciągłość operacji odwracania macierzy (względem normy operatorowej).

31. Tw. *o lokalnej odwracalności* (*dow. fragmentu o lokalnej injektywności i o różniczkowalnosci $(f|_U)^{-1}$) pewnej kuli).

32. Tw. *o funkcjach uwikłanych* (dow. dla przypadku 2 zmiennych, lub ogólnym). Pochodne *funkcji uwikłanej*

33. Warunek wystarczający dla istnienia ekstremum lok. funkcji uwikłanej konieczny -dla *ekstremum warunkowego* (mnożniki Lagrange'a). Uzasadnienie dla ekstremum f(x,y) przy warunku g(x,y)=0 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).