Zagadnienia z teorii (II sem. analizy, WMS) w 2016

1. Definicja *całki Riemanna*, przykład f niecałkowalnej ograniczonej, ograniczoność funkcji całkowalnych, sumy całkowe Darboux (dolne i górne), ich zachowanie po rozdrobnieniu podziału.

2. Definicja całki dolnej (i górnej), *twierdzenie Darboux* (=kryterium całkowalności) [(*) lemat o sumach dolnych dla ciągu normalnego podziałów], *kryterium Riemanna* całkowalności funkcji ograniczonej.

3. *Całkowlaność funkcji ciągłych.* Całkowalność *sumy i iloczynu* funkcji całkowalych

4. Pierwsze twierdzenie *o wartości średniej* dla całek, tw. *Newtona-Leibniza*

5. *Kryterium porównawcze* zbieżności całki niewłaściwej.

6. *Kryterium całkowe* zbieżności szeregów.

7. Drugie tw. o wartości średniej (*wzór Bonneta*), *kryterium Dirichleta* dla całek

8. *Tw. o przyrostach* dla funkcji o wartościach wektorowych $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, wzór na pochodną długości łuku krzywej, wzór na *długość łuku* krzywej. Przykład krzywej nieprostowalnej.

9. *Wahanie całkowite*, krzywe prostowalne, norma przestrzeni $BV[a, b]$, oszacowanie wahania dla funkcji monotonicznych i dla funkcji klasy C^1, lub spełniających warunek Lipschitza. Definicja *całki Riemanna-Stjeltjesa* $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ w przypadku f ciągłej, $g \in BV[a, b]$ (bez dowodów zbieżności sum całk.).

10. *Iloczyn skalarny* $\langle f, g\rangle$ zdefiniowany dla $f, g \in R(a, b)$ przez całkę. Porównanie (=podanie nierówności typu $\|f\|_j \leqslant C\|f\|_k$) norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt$, $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$ oraz $\|f\|_{[a,b]} := \sup_{[a,b]} |f|$, ciągłość funkcjonału $f \mapsto \int_a^b f(t)\, dt$ względem tych norm. *Całkowanie szeregów* wyraz-po wyrazie.

11. Zupełność przestrzeni $C[a, b]$ oraz $B(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f\|_\Omega < \infty\}$ z normą $\|f\|_\Omega := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

12. Zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^\infty x_n$ spełniających warunek $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$ *(bezwzględnie zbieżnych)* w przestrzeni Banacha, „*Test majorant*” Weierstassa.

13. Twierdzenie *o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi* (zbieżność $f_n(a)$ i zbieżność jednost. $f_n' \rightrightarrows g$ w $[a, b]$ implikują zb. jednost. $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f \in C^1[a, b],\ f' = g$.) Zupełność przestrzeni $C^1[a, b]$

14. Szereg potęgowy -*promień i koło zbieżności*, zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności.

15. *Twierdzenie Abela* o szeregach potęgowych zbieżnych na końcu przedziału zbieżności, zastosowanie do przedstawienia $\ln 2$ jako $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

16. Definicja zbiorów *zwartych,* charakteryzacja zwartych podzbiorów w $\mathbb{R}^n$, "warunek pokryć skończonych" -jego dowód dla $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ograniczoność i osiąganie maksimum przez funkcje ciągłe na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^n$.

17. *[Zasadnicze Twierdzenie Algebry.(*)]*

18. Granice iterowane. Pierwsze *tw. o granicy podwójnej*, jakiś przykład braku równości 2 granic iterowanych.

19. Pochodne cząstkowe a *różniczkowalność funkcji* n zmiennych (Tw.: ciągłość wszystkich poch. cząstkowych $\partial f/\partial x_j \Rightarrow$ różniczkowalność f), definicja $C^1(\Omega)$.

20. Różniczka złożenia i jej postać macierzowa. „*Reguła Łańcucha*".

21. *Pochodne kierunkowe* (jednostronne), ich związki z gradientem, *twierdzenie o wartości średniej i o przyrostach.*

22. Druga różniczka, macierz Hessego, twierdzenie *o symetrii drugiej różniczki* funkcji klasy C^2.

23. *Wzór Taylora* z resztą Lagrange'a dla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (wyprowadzenie dla rzędu 2, w przypadku 2 zmiennych).

24. Warunki na istnienie *ekstremów lokalnych* (np. maksimum) dla $f \in C^2(\Omega)$.

25. Równanie *płaszczyzny stycznej* do wykresu (=do powierzchni $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$) -szkic dowodu styczności. *Wektor normalny.*

26. Otwartość zbioru macierzy nieosobliwych i [(*)ciągłość operacji odwracania macierzy (względem normy operatorowej)].

27. Tw. Banacha o odwzorowaniu zwężającym (wystaczy dla f na podzbiorach domkniętych w $\mathbb{R}^n$).

28. Tw. *o lokalnej odwracalności* [(*)dow. fragmentu o lokalnej injektywności i o różniczkowalnosci $(f|_U)^{-1}$) pewnej kuli)].

29. Tw. *o funkcjach uwikłanych* (dow. dla przypadku 2 zmiennych, lub ogólnym). Pochodne *funkcji uwikłanej*

30. Warunek konieczny dla istnienia ekstremum lok. funkcji uwikłanej konieczny -dla *ekstremum warunkowego* (mnożniki Lagrange'a). Uzasadnienie dla ekstremum $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

31. Twierdzenie Pitagorasa dla normy określonej przez iloczyn skalarny. *Lemat o współczynnikach* wektora $g = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$ względem układu ortonormalnego (e_n). *Nierówność Bessela* dla układów ortogonalnych.

32. Ortogonalność układu trygonometrycznego (rzeczywistego i w postaci e^{int}), *szereg Fouriera* - wzory na współczynniki i na sumy częściowe, *tw. Dirichleta* (zarys dow.)

33. (*)[*Twierdzenie Fejéra*], zastosowanie do tw. Weierstrassa o gęstości wielomianów w $C[a, b]$.

34. Zbieżność szeregu Fouriera $S[f]$ (średniokwadratowa). *Tożsamość Parsevala.*

35. Definicja i [(*)własności] transformaty całkowej Fouriera (jeśli zdążymy)

UWAGA: Fragmenty oznaczone gwiazdką wyróżniają zagadnienia nieco trudniejsze (bądź nieco wykraczające poza główny kurs) i ich dokładniejszej znajomości będę jedynie oczekiwał od osób mogących otrzymać ocenę „bdb". Dotyczy to często nie całego punktu objętego danym numerem z listy, tylko fragmentu oznaczonego nawiasem kwadratowym. Wypowiedzi takich twierdzeń jednak obowiązują. (Na przykład, oprócz sformułowania tw. Fejéra, obowiązuje uzasadnienie gęstości zbioru wielomianów w $C[a, b]$, (która w dość prosty sposób wynika z tego twierdzenia).
W paru miejscach ograniczyć się można do szczególnych przypadkow dowodów, lub do ich zarysu- jeśli jest taka uwaga przy danym twierdzeniu na liście. Jak na matematyków przystało, twierdzeń uczymy się wraz z dowodami.