# 11 Operatory zwarte normalne

Jak już wiemy, operatory zwarte stanowią ideał w algebrze $\mathcal{B}(H)$ operatorów liniowych ciągłych w przestrzeni Hilberta. Można wykazać, że jest on domknięciem ideału operatorów skończonego rzędu. Tak jest nawet w każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha $X$ posiadającej (jakąkolwiek) bazę Schaudera $(e_n)$.

Możemy w paru linijkach naszkicować dowód: Wówczas tworzymy ciąg operatorów "sum częściowych" $P_k$ odwzorowujących wektor $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ w wektor $P_k x := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n$. Dla każdego ustalonego wektora $x$ mamy $\|x - P_k x\| \to 0$ przy $k \to \infty$ , co wynika wprost z definicji bazy Schaudera. W terminach operatorowych mówimy, że ciąg $(P_k)$ zmierza w silnej topologii operatorowej do operatora identyczności: $I \in \mathcal{B}(X)$. Nie jest to zbieżność w normie operatorowej (zwana też zbieżnością jednostajną), tylko zbieżność silna (SOT) -od "*Strong Operator Topology*". Można wykazać (= ćwiczenie), że gdy $K \in \mathcal{B}(X)$ jest operatorem zwartym, zaś $P_n \to P(SOT)$, to $\|P_n K - PK\| \to 0$ przy $n \to \infty$. (Kolejność złożenia jest tu istotna). W naszej sytuacji operatory $P_k$ mają rząd $k < \infty$, rząd $P_n K$ nie przekracza $n$, więc jest skończony, zaś $P = I$, więc $\|P_n K - K\| \to \infty$.

Są jeszcze mniejsze ideały (tzw. klasy Schattena-von Neumanna $\mathcal{S}_p$), które są zupełne w nieco innych normach $\|T\|_p$ dla $1 \leqslant p < \infty$. Tym razem ograniczyć musimy się do przestrzeni Hilberta $H$, a dla przejrzystości rozpatrzymy jedynie przypadek $p = 2$, gdzie ideał $\mathcal{S}_2$ znany jest jako przestrzeń operatorów Hilberta-Schmidta. Jeśli $(e_n)$ jest bazą ortonormalną w $H$, to można wykazać, że dla operatora $T \in \mathcal{B}(H)$ wartość $\|T\|_2^2$ zdefiniowana jako $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej i jej pierwiastek kwadratowy określa normę $\|T\|_2$ na zbiorze $\mathcal{S}_2$ tych operatorów liniowych na $H$, dla których wartość ta jest skończona. Ponadto

$$\|T\| \leqslant \|T\|_2, \quad \|T\|_2 = \sum_{j,n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_j \rangle \tag{1}$$

–co można łatwo zauważyć mając zadany wektor $e_1$ o normie 1 -uzupełniamy go ciągiem $e_2, e_3, \ldots$ do (jakiejś) bazy ortonormalnej. Operatory liniowe ciągłe $T_k$ skończonego rzędu przekształcające wektory $e_n$ w $Te_n$ gdy $n \leqslant k$ oraz $e_n$ w zero gdy $n > k$ zmierzają w $\| \, \|_2$ do operatora $T$, więc dzięki nierównosci(1), również w normie operatorowej $\| \, \|$. To, jak już wiemy (z poprzedniego wykładu) implikuje zwartość $T$. Dzieki tym obserwacjom możemy wykazać zwartość operatorów całkowych z jądrem $K(\cdot,\cdot) \in L^2(\mu \times \mu)$ na przestrzeni $H = L^2(\mu)$ postaci

$$(T_K f)(s) = \int f(t) K(s,t)\, d\mu(t), \quad \texttt{jeżeli} \quad \int\int |K(s,t)|^2 \, d\mu(s)\, d\mu(t) < \infty. \tag{2}$$

Dowód polega na sprawdzeniu, że gdy klasy równoważności funkcji $e_n(s) \in L^2(\mu)$ stanowią bazę ortonormalną w $L^2(\mu)$, to ciąg $(e_j(s)e_n(t))$ podwójnie indeksowany (przez $(j,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) jest bazą ortonormalną w $L^2(\mu \times \mu)$. Następnie stosuje się tożsamość Parsevala oraz równość z (1), która będzie dawać całkę iterowaną $\int\int |K(s,t)|^2 \, d\mu(s)\, d\mu(t)$ wykazując, że jest ona równa $\|T\|_2^2$. Szczegóły pomijam. Trochę więcej można znaleźć (po angielsku, s.12 -13) na stronie internetowej

`{http://home.agh.edu.pl/~rudol/Operat/Oper_Theory1.pdf}`

Na przykład, każda funkcja $K$ ciągła (a nawet tylko mierzalna i ograniczona) na kwadracie $[0,1] \times [0,1]$ definiuje względem miary Lebesgue'a operator całkowy zwarty $T_K$. Najbardziej znanym operatorem tego typu jest operator Volterry $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\, ds$. Tu $K$ jest funkcja charakterystyczną trójkąta $\{(s,t) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$. Co ciekawe, ten operator zwarty nie ma wartości własnych, jest niezerowy, a jego widmo pokrywa się z punktem $\{0\}$. Nie jest to jednak operator normalny. Jako ćwiczenie proszę sprawdzić że operatorem sprzężonym do $T_K$ jest operator całkowy z jądrem $K^*(s,t) := \overline{K(t,s)}$ (sprzężenie zespolone).

Wracając do ogólnej teorii pod koniec poprzedniego wykładu zobaczyliśmy, że wektory własne operatorów normalnych odpowiadające różnym wartościom własnym, są wzajemnie prostopadłe. W przypadku operatorów zwartych wynika stąd dalszy wniosek:

**Twierdzenie.** Widmo operatora zwartego normalnego $T$ jest co najwyżej przeliczalne i jedynym jego punktem skupienia może być punkt zero. Krotności niezerowych wartości własnych $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, czyli wymiary $\dim(\mathcal{N}(T - \lambda I))$ są skończone.

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $\lambda_n$ jest ciągiem parami różnych wartości własnych operatora $T$, dla których

$$\delta := \inf_n |\lambda_n| > 0,$$

zaś $x_n$- odpowiednimi wektorami własnymi o normie 1. Dla $n \neq k$ mamy (z twierdzenia Pitagorasa)

$$\|Tx_n - Tx_k\|^2 = \|\lambda_n x_n + (-\lambda_k)x_k\|^2 = |\lambda_n|^2\|x_n\|^2 + |\lambda_k|^2\|x_k\|^2 \geqslant 2\delta^2.$$

To przeczy zwartości $T$, bo z ciągu o wyrazach $Tx_n$ powinno dać się wybrać podciąg zbieżny (spełniający w normie operatorowej warunek Cauchy'ego).

Gdyby dla pewnego $\lambda \neq 0$ podprzestrzeń własna miała wymiar nieskończony, to mamy w niej ciąg ortonormalny $x_n$ dla kórego $Tx_n = \lambda x_n$ i znów wykorzystując tw. Pitagorasa -otrzymamy, jak wyżej, sprzeczność. Widmo $T$ jest więc ciągiem punktów zmierzających do zera lub zbiorem skończonym. □

Przejdźmy teraz do przypadku operatorów samosprzężonych, zakładamy, że $S = S^* \in \mathcal{B}(H)$. Wykażemy najpierw, że widmo jest rzeczywiste: $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$. W tym celu zdefiniujmy pewien zbiór $W(S)$ zwany obrazem numerycznym operatora $S$

**Definicja.** Obrazem numerycznym (dowolnego) operatora $S$ nazywamy zbiór

$$W(S) := \{\langle Sx, x\rangle : \, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Z nierówności Schwarza wynika, że jest to podzbiór koła $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|S\|\}$. Nie musi to być zbiór domknięty, ale jego domknięcie zawsze zawiera widmo. Np. dla widma aproksymatywego (=całe widmo dla operatorów normalnych) gdy $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$, to istnieje ciąg wektorów $(x_n)$ o normach 1, dla którego $\|Sx_n - \lambda x_n\| \to 0$. Wtedy z nierówności Schwarza wynika, że również do zera zmierza ciąg $\langle (Sx_n - \lambda x_n), x_n\rangle = \langle Sx_n, x_n\rangle - \lambda$, co dowodzi, że $\lambda$ należy do domknięcia $W(S)$. Gdyby $\lambda \in \sigma(S) \setminus \sigma_{ap}(S)$, to jak wynika z ostatniego twierdzenia w wykładzie 9., $\bar{\lambda}$ będzie wektorem własnym operatora sprzężonego $S^*$ (którego obraz numeryczny składa się, jak łatwo zauważyć, ze sprzężeń zespolonych liczb należących do $W(S)$). Oczywiście, wszystkie wartości własne operatora należą do jego obrazu numerycznego -nawet bez konieczności jego domykania. Ponadto dla operatorów samosprzężonych wprost z definicji i z własności iloczynu skalarnego wykika, że $S = S^* \Rightarrow W(S) \subset \mathbb{R}$, domknięcie też zawiera się w $\mathbb{R}$. Reasumując, mamy więc następujące

**Twierdzenie.** Widmo operatora samosprzężonego jest rzeczywiste. Widmo każdego operatora liniowego ciągłego zawiera się w domknięciu jego obrazu numerycznego.

Jak wyniknie z twierdzenia spektralnego, implikacja odwrotna do pierwszej tezy -ale w klasie operatorów normalnych - jest prawdziwa. Aby uzyskać twierdzenie spektralne potrzebujemy jeszcze dwu faktów: po pierwsze- oszacowania normy operatora $S$ przez tak zwany promień spektralny, najpierw oszacujemy ją przez tzw. promień numeryczny.

**Definicja.** Promieniem numerycznym operatora $T \in \mathcal{B}(H)$ nazywamy liczbę

$$w(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \, \|x\| = 1\}.$$

Promieniem spektralnym nazywamy liczbę

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Twierdzenie.** Dla operatora $T \in \mathcal{B}(H)$ zachodzą nierówności

$$w(T) \leqslant \|T\| \leqslant 2w(T). \tag{3}$$

Dla operatorów samosprzężonych $S \in \mathcal{B}(H)$ mamy równości $w(S) = \|S\| = r(S)$. Ponadto kresy obrazu numerycznego: $m := \inf W(S)$, $M := \sup W(S)$ należą do widma tego operatora.

Dowód. Pierwsza z nierówności (3) jest prostym wnioskiem z nierówności Schwarza. Dowod drugiej nierówności przeprowadźmy najpierw dla operatora $S = S^*$. Zauważmy, że $\|S\| = \sup\{\Re\langle Sx, y\rangle : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$. Faktycznie, gdy $\|Sx\|$ zmierza do $\|S\| > 0$, gdzie $\|x\| = 1$, to wystarczy wziąć $y = \frac{1}{\|Sx\|}Sx$, by otrzymać iloczyn skalarny $\langle Sx, y\rangle$ -rzeczywisty, nawet nieujemny, dowolnie przybliżający $\|S\|$. Wzór polaryzacyjny "okrojony do części rzeczywistej" (wykorzystujący samosprężoność $S$) ma postać

$$4\Re\langle Sx, y\rangle = \langle S(x+y), x+y\rangle - \langle S(x-y), x-y\rangle$$

(wynika on z b. prostego przeliczenia). Z jednorodności iloczynu skalarnego i z definicji $w(S)$ wynika, że dla każdego wektora $w \in H$ mamy

$$|\langle Sw, w\rangle| \leqslant w(S)\|w\|^2,$$

więc wstawiając moduły w naszym wzorze i stosując nierówność trójkąta, z ostatniej nierównosci wnioskujemy, że $4|\Re\langle Sx, y\rangle| \leqslant w(S)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$, ale tożsamość równoległoboku pozwala zapisać $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ jako $2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, a ostatnia wartość jest równa 4, bo $\|x\| = 1 = \|y\|$. Wykazaliśmy więc nierówność: $4|\Re\langle Sx, y\rangle| \leqslant 4w(S)$, jeśli tylko $\|x\| = \|y\| = 1, S = S^*$. Dowodzi to pierwszej tezy ( z równością) w przypadku samosprzężonym. Aby wykazać nierówność $\|T\| \leqslant 2w(T)$ w przypadku oogólnym zauważmy, że gdy rozłożymy dowolny operator $T \in \mathcal{B}(H)$ na części: rzeczywistą i urojoną: $S_r := \frac{1}{2}(T + T^*$, odpowiednio $S_i := \frac{1}{2i}(T - T^*)$, to $T = S_r + iS_i, S_r = S_r^*, S_i = S_i^*$. Iloczyny skalarne $\alpha := \langle S_r x, x\rangle$ oraz $\beta := \langle S_i x, x\rangle$ są rzeczywiste, zaś $\zeta := \langle Tx, x\rangle = \alpha + i\beta$, więc $|\alpha| \leqslant |\zeta|$ i w konsekwencji (po przejściu do kresów) $w(S_r) \leqslant w(T)$. Analogicznie, $w(S_i) \leqslant w(T)$. Z dotychczasowej części dowodu, $\|S_r\| = w(S_r), \|S_i\| = w(S_i)$, zaś z nierówności trójkąta $\|T\| \leqslant \|S_r\| + \|S_i\|$, więc majorantą dla tej wartości jest $2w(T)$.

(Uwaga: Przykład operatora Volterry pokazuje, że druga z nierówności (3) nie ma odpowiednika dla promienia numerycznego w przypadku niesamosprzężonym.)

Dla dowodu drugiej tezy wystarczy rozpatrzeć kres górny, czyli wykazać, że $M \in \sigma(S)$. Przypomnijmy sobie, że na drugiej stronie wykładu 4. była nierówność Schwarza dla form półtoraliniowych nieujemnych, które są skośnie symetryczne (hermitowskie) -a takie są formy $\Omega_T(x, y) := \langle Sx, y\rangle$ wyznaczone przez operator samosprzężony $T = T^*$, o ile jest on "nieujemny" w tym sensie, że $\forall_{x\in H}\ \Omega_T(x, x) \geqslant 0$. Konkretnie, nierówność ta mówiła, że

$$|\Omega_T(x, y)|^2 \leqslant \Omega_T(x, x)\Omega_T(y, y). \tag{4}$$

Gdy $M = \sup W(S)$, niech $T := MI - S$, czyli $Tx = Mx - Sx$. Jak łatwo zauważyć, jest to właśnie operator samosprzężony nieujemny, czyli forma kwadratowa $Q_T(x, x)$ jest stale nieujemna i można tu stosować (4). Z definicji kresu wynika, że istnieje ciąg wektorów $x_n$ o normie 1 i takich, że $\langle Sx_n, x_n\rangle \to M$. Wówczas $Q_T(x_n, x_n) \to 0$ przy $n \to \infty$. Dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że $\|Tx_n\| \to 0$, bo stąd wyniknie, że $M \in \sigma(S)$.

Ale $\|Tx_n\| = \sup\{|\langle Tx_n, y\rangle| : \|y\| = 1\}$ Ostatnią wartość szacujemy dzięki (4) przez

$$\sup_{\|y\|=1} (Q_T(x_n, x_n)Q_T(y, y))^{\frac{1}{2}} \leqslant (Q_T(x_n, x_n)\|T\|)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \texttt{przy} \quad n \to \infty.$$

Faktycznie, ze "zwykłej" nierówności Schwarza, $Q_T(y, y) \leqslant \|Ty\|\|y\| \leqslant \|T\|$. Podmieniając $S$ na $-S$ otrzymujemy należenie kresu dolnego zbioru $W(S)$ do widma operatora $S$. Ponieważ promień numeryczny $w(S)$, to większa z liczb: $|m|, |M|$, wynika stąd, że $w(S) \leqslant r(S)$. Oczywiście, $r(S) \leqslant \|S\|$ (jeśli tego nie wykazaliśmy, to zrobimy to teraz: dla $|\lambda > \|S\|$ odwracalność $S - \lambda I$ jest równoważna odwracalności operatora $\frac{1}{\lambda}S - I$, a tę otrzymujemy z twierdzenia o szeregu Neumanna, gdyż operator $\frac{1}{\lambda}S$ ma normę silnie mniejszą od 1. W efekcie, mamy równości $\|S\| = w(S) = r(S)$ gdy tylko $S = S^*$. $\square$

**Uwaga.** Dla operatorów normalnych niesamosprzężonych $N$ nadal zachodzi równość $\|N\| = r(N)$, można ją wykazać w inny sposób, wykorzystując tzw. Wzór Gelfanda na promień spektralny:

$$\forall_{T \in \mathcal{B}(H)}\ r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Ze "wzoru $C^*$" , mówiącego, że $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ stosowanego do wyliczenia $\|T^2\|^2 = \|T^*T^*TT\|$, wykorzystując przemienność operatorów $T$ oraz $T^*$ (czyli normalność $T$), dostaje się równość $\|T^2\| = \|T\|^2$. Powtarzając, mamy $\|T^4\| = \|T\|^4$ i tak dalej -dla diadycznych wykładników, więc podciąg ciągu zbieżnego (bo logarytmicznie wypukłego) o wyrazach $\sqrt[n]{\|T^n\|}$ jest stały, równy $\|T\|$. Ze wzoru Gelfanda otrzymamy równość $\|T\| = r(T)$ dla operatorów normalnych. Dowód wzoru Gelfanda (w kontekście algebr Banacha) można znaleźć w "Analizie Funkcjonalnej" W. Rudina.

Drugim elementem potrzebnym w dowodzie twierdzenia spektralnego jest pojęcie podprzestrzeni niezmienniczej. Podprzestrzeń domknięta $X \subset H$ jest niezmiennicza dla operatora $T \in \mathcal{B}(H)$, gdy $T(X) \subset X$. Wówczas przez $T|_X$ rozumiemy zawężenie operatora $T$ do podprzestrzeni $X$, ale działające już jako element $\mathcal{B}(X)$, czyli endomorfizm przestrzeni $X$. Oczywiście, takie zawężenie operatora zwartego będzie nadal zwarte. W teorii operatorów normalnych ważną rolę odgrywa też pojęcie podprzestrzeni redukującej operator $T$. Jest to taka podprzestrzeń, która jest równocześnie niezmiennicza dla $T$, jak i dla operatora sprzężonego $T^*$. Jeśli $P_X$ oznacza operator rzutu prostopadłego na podprzestrzeń $X$, to $X$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $TP_X = P_XTP_X$, zaś $X$ redukuje operator $T \Leftrightarrow TP_X = P_XT$. Gdy $X$ jest niezmiennicza dla operatora normalnego $T$, to jego restrykcja $T|_X$ jest operatorem normalnym na $X$ wtedy i tylo wtedy, gdy $X$ redukuje $T$. Na szczęście, dla operatorów samosprzężonych $S = S^*$ podprzestrzeń niezmiennicza $X$ dla $S$ jest również redukująca, zaś restrykcja $S|_X$ jest nadal operatorem samosprzężonym (na $X$). W szczególności, podprzestrzenie własne są niezmiennicze gdy $S = S^*$. Nietrudno jest wykazać, że dopełnienie ortogonalne $X^\perp = H \ominus X$ podprzestrzeni niezmienniczej $X$ w przestrzeni $H$ jest również podprestrzenią niezmienniczą wtedy i tylko wtedy, gdy $X$ jest to podprzestrzeń redukująca (tak będzie zawsze dla operatorów samosprzeżonych. Na koniec, domknięta obwiednia liniowa rodziny podprzestrzeni niezmienniczych $\{M_\alpha, \alpha \in A\}$ jest również niezmiennicza.

W następnej kolejnosci wykażemy twierdzenie spektralne dla zwartych operatorów samosprzeżonych $S$ wykazując, że istnieje baza ortonormalna (w dopełnieniu ortogonalnym jądra operatora $S$) złożona z wektorów własnych $e_n$ odpowiadających niezerowym wektorom własnym i gdy $Se_n = \lambda_n e_n$, to dla dowolnego wektora $x \in H$ mamy

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

(W niektórych przypadkach zamiast sumy nieskończonej może tu być suma skończona.)