11 Miara spektralna

Zanim przystąpimy do sformułowania ogólnego twierdzenia spektralnego dla operatorów samosprzężonych, wprowadzimy jedno bardzo ważne pojęcie.

Definicja. Jeżeli $\mathcal{B}$ jest pewną ustaloną σ-algebrą podzbiorów danego zbioru Ω, to miarą spektralną na zbiorze Ω w przestrzeni Hilberta H nazywamy odwzorowanie $E : \mathcal{B} \ni \Delta \to E(\Delta) \in \mathcal{B}(H)$, które ma następujące własności:

1. $E(\Omega) = I, \quad E(\emptyset) = 0$
2. $\forall_{\Delta \in \mathcal{B}}\, E(\Delta)$ jest projekcją ortogonalną w przestrzeni H
3. $\big(\Delta_n \in \mathcal{B}, \forall_{n \neq k} \Delta_n \cap \Delta_k = \emptyset\big) \Rightarrow \forall_{x \in H}\ E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x.$

Zauważmy, że warunek 3. oznacza przeliczalną addytywność -ale nie w topologii normy operatorowej, tylko w sensie silnej zbieżności operatorów. Wynika z niego w szczególności zbieżność przy powyższych założeniach szeregu $\sum E(\Delta_n)$ w słabej topologii operatorowej. Innymi słowy, dla dowolnie ustalonej pary wektorów $x, y \in H$ funkcja

$$\mathcal{B} \ni \Delta \mapsto \mu_{x,y}(\Delta) := \langle E(\Delta)x, y\rangle \tag{1}$$

jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru. Jest to tak zwana miara zespolona. Można jej wartości rozkładać na część rzeczywistą i urojoną, a każdą z tych miar rzeczywistych- na część nieujemną i część niedodatnią. Można też patrzeć na takie miary jako na iloczyn pewnej miary nieujemnej przez "funkcję gestości" przyjmującą wartości zespolone o module 1. Jeszcze inaczej: gdy $x = y$, to mamy miarę nieujemną $\mu_x := \mu_{x,x}$ (a nawet probabilistyczną, gdy dodatkowo założyć, że $\|x\| = 1$). Teraz można wykorzystać wzór polaryzacyjny, by uzyskać rozkład

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{4} i^m \mu_{x+i^m y}. \tag{2}$$

(Tu $i^2 = -1$). Używając którejś z tych metod możemy już łatwo rozszerzyć definicję całki na tego typu miary. Dodatkowo, co jest bardzo ważne, otrzymamy oszacowania przez normę supremową z funkcji podcałkowej:

$$|\int_\Omega \phi\, d\mu_{x,y}| \leqslant \|\phi\|_\Omega \|x\|\|y\|. \tag{3}$$

Można wykazać, że dla rozłącznych zbiorów Δ_j, Δ_k obrazy projekcji $E(\Delta_j)$ oraz $E(\Delta_k)$ są wzajemnie prostopadłe, więc mamy do czynienia z szeregiem ortogonalnym (czyli z szeregiem $\sum v_j$, którego wyrazy -tu postaci $v_j := E(\Delta_j)x$ są wzajemnie prostopadłe). Dla takich szeregów nietrudno wykazać, że ograniczoność sum częściowych już implikuje zbieżność [1]. A taka ograniczoność wynika np. ze słabej zbieżności. Stąd przeliczalna addytywność w sensie silnej i w sensie słabej topologii operatorowej są równoważne. Natomiast nie ma mozliwości, by szereg projekcji $E(\Delta_n)$ był zbieżny w normie operatorowej, bo różnice między sumą szeregu a sumą częściową są projekcjami o normie 1 i nie mogą w normie zmierzać do zera.

Mając miary możemy utworzyć całki. Dla funkcji mierzalnej ograniczonej $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ możemy zdefiniować jej całkę względem miary spektralnej E oznaczaną symbolem $\int_\Omega \varphi(\lambda)E(d\lambda)$ jako operator $T \in \mathcal{B}(H)$, który dla dowolnych $x, y \in H$ spełnia warunek

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Omega \varphi(\lambda) d\mu_{x,y}(\lambda). \tag{4}$$

[1] Sprawdzamy zbieżność poprzez warunek Cauchy'ego dla ciągu $S_k := \sum_{j=1}^{k} v_j$. Jak w dowodzie nierówności Bessela sprawdzamy, ze $\sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 < \infty$, zaś dla $m > k$ mamy $\|S_m - S_k\|^2 = \sum_{j=k+1}^{m} \|v_j\|^2$, co już łatwo implikuje wspomniany warunek Cauchy'ego

Z nierówności (3) po przejściu do supremum po kuli jednostkowej (względem x, y) otrzymamy oszacowanie dla normy operatora T będącego taką całka spektralną:

$$\| \int_{\Omega} \varphi(\lambda) E(d\lambda) \| \leqslant \|\varphi\|_{\Omega} = \sup_{\lambda \in \Omega} |\varphi(\lambda)|. \tag{5}$$

Jest też druga metoda konstrukcji całki spektralnej: Dla zwykłej miary skończonej μ na zbiorze Ω definiujemy najpierw całki z funkcji prostych: Funkcjonał "całka na przestrzeni wektorowej funkcji prostych" jest to jedyne przedłużenie liniowe funkcji przypisującej funkcjom charakterysycznym χ_{Δ} zbiorów mierzalnych Δ ich miarę. Musi wtedy już być $\int \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{\Delta_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(\Delta_j)$. W taki sam sposób postępujemy dla całki spektralnej- definiując najpierw

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{\Delta_j}(\lambda) \, E(d\lambda) := \sum_{j=1}^{k} c_j E(\Delta_j) \in \mathcal{B}(H). \tag{6}$$

Ta definicja pokrywa się z poprzednią, dzięki relacjom między $E(\cdot)$ oraz miarami $\mu_{x,y}$. Na dalszym etapie przechodzimy od funkcji prostych nieujemnych do całkowania funkcji mierzalnych nieujemnych ϕ. Są one granicami niemalejących ciągów funkcji prostych

$$\phi_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \chi_{\Delta_{j,n}}, \quad \texttt{gdzie} \quad \Delta_{j,n} = \phi^{-1}\big[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\big)$$

dla $j = 1, 2, \ldots, n2^n - 1$, zaś dla $j = n2^n$ przyjmujemy $\Delta_{n2^n,n} = \phi^{-1}[n, +\infty)$. Zauważmy, że przy ustalonym n zbiory $\Delta_{j,n}$ są parami rozłączne, na takim zbiorze funkcja ϕ_n przyjmuje wartość $\frac{j}{2^n}$, bo inne składniki sumy szeregu są tam zerowe. Te funkcje ϕ_n można więc również zapisać nie przez szereg, tylko przy użyciu klamry "cases". Na ten ciąg możemy też spojrzeć, jak na kolejne przybliżenia (z zaokrągleniem w dół) wartości $\phi(\lambda)$ zapisywanych w układzie dwójkowym z dokładnością do n miejsc po przecinku, wyjątkiem są wartości $\phi(\lambda)$ większe od n -które zastępujemy przez n w tym celu, by uzyskać skończoną ilość składników. Gdy ϕ jest ograniczona, to nawet $\phi_n \rightrightarrows \phi$ i wówczas jednostajny warunek Cauchy'ego dla tego ciągu implikuje dzięki oszacowaniom (5) zbieżność w normie operatorowej całek spektralnych z ϕ_n do operatora ograniczonego, który możemy zdefiniować jako właśnie całkę $\int \phi \, E(d\lambda)$.

Dla funkcji mierzalnych nieograniczonych nie będzie zbieżności w normie operatorowej, będzie tylko zbieżność (w normie H) na ustalonych wektorach x -i to nie na wszystkich, tylko na wektorach x z dziedziny całki spektralnej $\mathcal{D}(T)$, gdzie $T = \int \phi \, E(d\lambda)$. Definiujemy mianowicie tę dziedzinę wzorem

$$\mathcal{D}\big(\int_{\Omega} \phi \, E(d\lambda)\big) := \{x \in H : \int_{\Omega} |\phi(\lambda)|^2 \, d\mu_{x,x} < \infty\}. \tag{7}$$

Tego fragmentu teorii nie zdążymy w tym kursie dokładnie uzasadnić. **Naszkicujemy jedynie konstrukcję miary spektralnej dla operatora samosprzężonego $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$.**

Przypomnujmy, że skonstruowaliśmy ciągły rachunek funkcyjny:

$$C(\sigma(T), \mathbb{R}) \ni f \to f(T) \in \mathcal{B}(H),$$

który jest odwzorowaniem izometrycznym, a jego wartości są operatorami samosprzężonymi. Gdy $f \geqslant 0$ na widmie T, to operator $f(T)$ jest nieujemny, czyli zachodzą nierówności $\forall_{v \in H} \langle f(T)v, v\rangle \geqslant 0$.

Dla ustalonych $x, y \in H$ rozważmy funkcjonał liniowy $\Phi_{x,y}(f) := \langle f(T)x, y\rangle$. Ciągłość tego funkcjonału mamy dzięki nierównościom

$$|\langle f(T)x, y\rangle| \leqslant \|f\|_{\Omega} \|x\| \|y\|, \quad \texttt{gdzie} \quad \Omega = \sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

Wynikają one z równości $\|f(T)\| = \|f\|_\Omega$ i z oszacowania $\|f(T)x\| \leqslant \|f(T)\|\|x\|$. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonałów liniowych ciągłych implikuje istnienie miar zespolonych borelowskich $\mu_{x,y}$ reprezentujących przez całkę te funkcjonały:

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_\Omega f\, d\mu_{x,y}. \tag{8}$$

Gdy chcemy ograniczać się do miar "zwykłych" -czyli rzeczywistych, nieujemnych miar borelowskich, to możemy zacząć od przypadku $x = y$, a mając już miary rzeczywiste nieujemne[2] μ_{xx} utworzyć miary zespolone borelowskie $\mu_{x,y}$ wykorzystując podany wyżej wzór polaryzacyjny dla miar (2).

Ponieważ zależność $\Phi_{x,y}f$ od pary wektorów $(x, y) \in H \times H$ jest półtoraliniowa, taka będzie też zależność miar $\mu_{x,y}(\Delta)$ przy ustalonym zbiorze borelowskim Δ. Faktycznie, gdy $f \in C(\Omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste, taka forma $\Phi_{x,y}f$ będzie hermitowska, gdyż wtedy operator $f(T)$ będzie samosprzężony. Aproksymując funkcję charakterystyczną χ_Δ przez ciąg funkcji rzeczywistych ciągłych ograniczonych przez 1 (dla zbiorów Δ bardziej regularnych -np. otwartych), a w ogólnym przypadku korzystając z regularności miar borelowskich ograniczonych na przestrzeniach metrycznych – wykazujemy, że również formy $H \times H \ni (x, y) \to q_\Delta(x, y) := \mu_{x,y}(\Delta) \in \mathbb{C}$ są hermitowskie Ponadto $|\mu_{x,y}(\Delta)| = |\int \chi_\Delta\, d\mu_{x,y}| \leqslant \|x\|\|y\|$. Wykorzystując teraz inne twiedzrnie Riesza (a właściwie -Riesza-Frécheta) możemy [3] wykazać, że każdej formie półtoraliniowej ograniczonej $q(x, y)$ odpowiada dokładnie jeden operator liniowy ciągły $A \in \mathcal{B}(H)$ taki, że

$$q(x, y) = \langle Ax, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

Gdy forma jest hermitowska, to taki operator A jest samosprzężony. Stosując to do form $q_\Delta(x, y)$ otrzymujemy operatory samosprzężone $E(\Delta)$ generujące tę formę q_Δ. Łatwo też zauważyć, że $\|E(\Delta)\| \leqslant 1$ oraz $E(\Omega) = I$, zaś $E(\emptyset) = 0$. Funkcja operatorowa E zależy od zbioru borelowskiego Δ w sposób przeliczalnie addytywny w słabej topologii operatorowej -bo dla dowolnie ustalonych x, y mamy przeliczalną addytywność $\mu_{x,y}$. Uwagi poczynione po wzorze (3) dadzą też taką sigma-addytywność w sensie silnej topologii operatorowej, jeśli tylko sprawdzimy, że $E(\Delta)$ są projekcjami ortogonalnymi. W tym celu wystarczy sprawdzić, że dla $P := E(\Delta)$ mamy $P^2 = P$ (bo już wiemy, że $P^* = P$). To jest chyba najtrudniejszy fragment dowodu. Należy na wstępie ostrec, że ani w słabej, ani w silnej operatorowej topologii mnożenie operatorów nie jest ciągłe. w słabej- nawet nie jest ciągowo ciągłe -bo dla $Ve_j = e_{j+1}$ określonego na kanonicznej bazie ortonormalnej w $\ell^2(\mathbb{N})$- czyli dla operatora przesunięcia 1-stronnego dzięki izometrii mamy $\|V^n x\| \to 0$, zaś $(V^*)^n \to 0$ w słabej topologii, podczas gdy $(V^*)^n V^n = I \not\to 0$. Natomiast mnożenie jest ciągowo ciągłe w topologii silnej zbieżności, co dość prosto wynika z zasady jednostajnej ograniczoności i z nierówności trójkąta. Dowodzi się, że dla monotonicznych i wspólnie ograniczonych ciągów funkcji ciągłych f_n również ciągi $f_n(T)$ są zbieżne w silnej topologii operatorowej. Zwarte podzbiory $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}$ są typu G_δ (przecięcia ciągów zbiorów otwartych). Ich funkcje charakterystyczne są granicami takich ciągów monotonicznych $f_n \in C(\Omega$. Wówczas również $f_n^2 \to \chi_K$ i można stąd wywnioskować, że $E(K)^2 = E(K)$. Można też wykazać, że rodzina tych zbiorów borelowskich Δ , dla których $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$ jest zamknięta

[2] W poprzednim wykładzie zauważyliśmy, że operator $f(T)$ będzie nieujemny gdy $f \geqslant 0$ na zbiorze Ω. Funkcjonały nieujemne odpowiadają miarom nieujemnym w twierdzeniu Riesza. My dowodziliśmy twierdzenia Riesza reprezentując dunkcjonały na $C[a, b]$ przy użyciu całki Stieltjesa $\int_a^b f\, dg$, gdzie dla funkcjonałów nieujemnych funkcja $g \in BV[a, b]$ była niemalejąca. Miarę borelowską reprezentującą dany funkcjonał tworzymy tak, by jej dystrybuantą była funkcja g i nieujemność miary odpowiada dokładnie temu, że jej dystrybuanta (słabo) rośnie.

[3] Ponieważ zależność $q(x, y)$ od y jest anty-liniowa, funkcjonał $H \ni y \to \psi(y) := \overline{q(x, y)} \in \mathbb{C}$ jest liniowy i jego ciągłość wynika z ograniczoności formy, czyli z istnienia stałej $M > 0$ takiej, że $|q(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\|$. Ze wspomnianego twierdzenia, ten funkcjonał ψ jest mnożeniem skalarnym przez pewien wektor, który oznaczymy Ax, o normie nie większej, niż $M\|x\|$. Z jednonaczności wektora reprezentującego funkcjonał i z liniowości q względem zmiennej x wynik liniowość tak skonstruowanego operatora A.

na branie granic ciągów monotonicznych (np. sumy ciągów wstępujących). Z Twierdzenia o Klasie Monotonicznej[4] wynika, że ta rodzina jest sigma-algebrą, więc musi zawierać wszystkie zbiory borelowskie. $\Box$

Więc E jest miarą spektralną Konfrontując teraz wzór (8) dla $f_1(\lambda) = \lambda$ (identyczność na zbiorze Ω) z równością (4) definiującą całkę speltralną $\int_\Omega f_1(\lambda)\, E(d\lambda)$ widzimy, że dla tak skonstruowanej miary spektralnej (skonstruowanej w oparciu o rachunek funkcyjny $f \mapsto f(T)$) mamy równość tej całki spektralnej oraz operatora T. Uzyskaliśmy więc nasz główny cel, twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych ograniczonych $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$. (dalsze jego tezy, które są w zasadzie wnioskami z pierwszej tezy - pozostawmy bez dowodu)

Twierdzenie Spektralne. Dla operatora samosprzężonego $T \in \mathcal{B}(H)$ istnieje miara spektralna borelowska $E(\cdot)$ na widmie $\sigma(T)$, dla której

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, E(d\lambda).$$

Wybrane Wnioski.

- Operator $S \in \mathcal{B}(H)$ jest przemienny z tym operatorem T wtedy i tylko wtedy gdy jest on przemienny ze wszystkimi operatorami $E(\Delta)$, czyli gdy obrazy wszystkich projekcji spektralnych $E(\Delta)$ są podprzestrzeniami redukującymi dla operatora S .
- Twierdzenie Spektralne, jak i jego wnioski zachodzą też dla operatorów normalnych oraz dla operatorów samosprzężonych nieograniczonych (ale tylko na ich dziedzinach)
- Całka spektralna zależy w sposób liniowy **oraz multyplikatywny** od funkcji podcałkowej. Jest to konsekwencją równości

  $$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2).$$

  (Jaka szkoda, że takiej własności multyplikatywnej nie ma całka Riemanna!)
- Gdy Δ_0 jest otoczeniem punktu λ_0 o promieniu r, czyli zbiorem $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < r\}$, to dla podprzestrzeni redukującej $M := E(\Delta_0)$ restrykcja $T|_M$ spełnia oszacowanie $\|T|_M - \lambda_0 I\| \leqslant r$.
- Gdy λ_0 jest punktem izolowanym widma operatora T, to jest to wartość własna T. Wówczas $E(\{\lambda_0\})$ jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń własną $\mathcal{N}(T - \lambda_0 I)$. Całka spektralna przyjmuje postać szeregu, gdy widmo T jest przeliczalne -więc otrzymujemy poprzednie tw. spektralne dla T zwartych normalnych.
- Gdy operator normalny ma widmo zawarte w zbiorze K, to w przypadku $K \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ jest on izometrią, a gdy $K \subset \mathbb{R}$, to jest on samosprzężony.

W niektórych źródłach (np. w książce W. Mlaka i w literaturze rosyjskiej) za miarę spektralną operatora samosprzężonego przyjmuje się dystrybuantę naszej $E(\cdot)$, czyli odwzorowanie $\mathbb{R} \ni t \to E_t := E((-\infty, t])$. Wartości własne T -to skoki tej dystrybuanty.

Na zakoczenie -prosty przykład: Gdy $H = L^2[a,b]$, operator mnożenia przez zmienną niezależną $(Tf(\lambda) = \lambda f(\lambda), f \in H$ ma miarę spektralną złożoną z operatorów $E(\Delta)$ mnożenia przez funkcje charakterystyczne zbiorów Δ. Całka spektralna z funkcji ϕ względem tej miary spektralnej, to operator mniożenia przez funkcję ϕ.

[4]Twierdzenie o Klasie Monotonicznej mówi, że jeśli rodzina $\mathcal{C}$ pozbiorów $A \subset \Omega$ ma następujące własności: $\Omega \in \mathcal{C}$, $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$, to najmniejsza klasa $\mathcal{M}$ zawierająca $\mathcal{C}$ i zamknięta na branie różnic zbiorów i na przeliczalne sumy rosnących ciągów zbiorów jest równa sigma-algebrze $\sigma(\mathcal{C})$ generowanej przez $\mathcal{C}$.