4 Zastosowania funkcjonałów -c.d.

Przedłużanie ciągłych funkcjonałów (i operatorów liniowych powiedzmy, T) z podprzestrzeni występuje też w bardziej "elementarnej" sytuacji: gdy dana podprzestrzeń liniowa M jest zbiorem gęstym w przestrzeni unormowanej X, zaś T przyjmuje wartości w pewnej przestrzeni Banacha Y.

Wtedy nie trzeba używać twierdzeń opartych na pewniku wyboru. Wykorzystujemy jedynie fakt jednostajnej ciągłości operatora liniowego ciągłego -co wynika z istnienia stałej M takiej, że $\|Tx\| \leqslant M\|x\|(\forall x \in X)$. Faktycznie, mamy określić wartość w punkcie $x \in X$ dla takiego rozszerzenia (oznaczmy je $\bar{T}$). Z gęstości M, istnieje ciąg wektorów $x_n \in M$ zbieżny do x. Jest to ciąg Cauchy'ego, jego obrazy: Tx_n -również: $\|Tx_n - Tx_k\| \leqslant M\|x_n - x_k\| \to 0$ przy $n, k \to \infty$. Z zupełności Y, istnieje granica (oznaczmy ją $\bar{T}x$) ciągu Tx_n. Gdyby wybrać inny ciąg z_n zbieżny do tego samego x, to $\|z_n - x_n\| \to 0$, więc z nierówności $\|Tz_n - Tx_n\| \leqslant M\|z_n - x_n\|$ wynika, że $\lim Tz_n = \lim Tx_n$ i nasza definicja $\bar{T}x$ jest poprawna (nie zależy od wyboru ciągu z M aproksymującego x). Przejścia graniczne pozwalają z liniowości T wywnioskować liniowość $\bar{T}$. Ciągłość też. Gdy $x \in M$, to możemy jako aproksymujące x_n wybrać ciąg stały równy x, więc $\bar{T}$ jest przedłużeniem T. (Symbol $\bar{T}$ jest nieprzypadkowy - wykres $\bar{T}$ jest domknięciem wykresu T w topologii produktu $X \times Y$). Wystarczy więc zbadać, czy możemy przedłużać operatory określone na podprzestrzeniach domkniętych M, co zaznaczymy pisząc $M = \bar{M}$.

Gdy istnieje operator projekcji z X na M, czyli taki operator liniowy, ciągły $P : X \to X$, że $P \circ P = P, P(X) = M$, możemy określić $\tilde{T}(x)$ wzorem

$$\tilde{T}x = T \circ P(x), \quad x \in X.$$

Nietrudno sprawdzić, że $Pv = v$ dla wszystkich $v \in M$, co daje liniowe, ciągłe rozszerzenie $\tilde{T}$ operatora T. Gdy istnieje możliwość przedłużania wszystkich operatorów $T \in B(M, Y)$ do jakichś operatorów $\tilde{T} \in B(X, Y)$, to otrzymamy projekcję P jako przedłużenie opertora I_M identyczności na M do pewnego operatora $P : X \to M$, który spełnia warunki projekcji na M. Mówimy, że podprzestrzeń domknięta M jest uzupełnialna w X, gdy istnieje podprzestrzeń domknięta $N \subset X$ taka, że X jest sumą prostą $M \oplus N$. Jak można wykazać, uzupełnialność M w X jest równoważna istnienu projekcji ciągłej $P \in B(X, M)$ (wtedy $N = \ker(P), M = P(X)$ -na odwrót, z jednoznaczności rozkładu $x = y + z, y \in M, Z \in N$ wyniknie liniowość P określonego wzorem $Px := y$). Ciągłość P wyniknie z twierdzenia Banacha o izomorfizmie, które będzie dopiero za parę tygodni.

Lindenstrauss i Tzafriri udowodnili dość zaskakujące twierdzenie, że jeśli każda domknięta podprzestrzeń M w przestrzeni Banacha X jest uzupełnialna, to X jest izomorficzna (choć na ogół nie izometrycznie) z pewną przestrzenią Hilberta H. (W przestrzeniach H dopełnieniem M do sumy prostej będzie $N = \{x \in H : \forall_{y \in M} x \perp y\}$, zaś P będzie rzutem prostopadłym.

Banach stosował twierdzenie H-B do udowodnienia, że istnieje skończenie addytywna funkcja zbioru ("miara") określona dla wszystkich podzbiorów w $\mathbb{R}$, pokrywająca się dla zbiorów mierzalnych ze zwykłą miarą (Jordana, lub Lebesgue'a) i niezmiennicza względem przesunięć. Dalej w tym kierunku, wykazał wspólnie z Tarskim, że niezmienniczość względem izometrycznych przekształceń uniemożliwia istnienie nawet skończenie addytywnej "miary" na sferze w $\mathbb{R}^3$ określonej dla wszystkich jej podzbiorów (*paradoksalny rozkład sfery*). Z kolei von Neumann zauważył, że pośrednią przyczyną jest nieprzemienność grupy izometrii sfery. Wyróżnił w związku z tym pojęcie grup dopuszczających średnie (ang. "amenable groups"). "Abelian groups ar amenable".

Innym zastosowaniem są tak zwane "granice Banacha" w odróżnieniu od zwykłych -pisane z dużej litery: LIM. Jest to funkcjonał liniowy na przestrzeni ℓ^∞ wszystkich ciągów ograniczonych, oszacowany przez $\limsup$ oraz "niezmienniczy względem przesunięć" w tym sensie, że $LIM(x_{n+1}) = LIM(x_n)$ a ponadto pokrywający się z granicą: $\lim x_n$ dla ciągów zbieżnych.

(Ten wstępny fragment wykładu jest tylko informacyjny, nie stanowi materiału obowiązkowego.)

Definicja 1. Mówimy, że funkcjonał liniowy rzeczywisty ciągły $\phi : X \to \mathbb{R}$ oddziela zbiory $A, B \subset X$, jeżeli obrazy $\phi(A), \phi(B)$ zawierają się odpowiednio w półprostych typu $(-\infty, \alpha), [\alpha, +\infty)$ dla pewnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ (kolejność zbiorów może być tu odwrócona). W przypadku przestrzeni zespolonej oddzielanie przez funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $f : X \to \mathbb{C}$ oznacza, że jego część rzeczywista, $\phi = \Re f$ oddziela te zbiory w powyższym sensie.

Zawsze będziemy zakładali wypukłość i rozłączność zbiorów oddzielanych. Obrazy przez odwzorowania liniowe takich zbiorów wypukłych są wypukłe - są to więc przedziały lub półproste w $\mathbb{R}$). Możliwość oddzielania wypukłych zbiorów przez ϕ jest więc równoważna rozłączności ich obrazów przez ϕ. Jeśli oddzielający funkcjonał jest ciągły (a do tego wystarcza np., by jeden z oddzielanych zbiorów miał niepuste wnętrze), to $E_\alpha := \{x \in X : \phi(x) = \alpha\}$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową rzeczywistą oo kowymiarze 1 w X. Skrótowo nazwijmy takie zbiory zbiorami typu "E_α" (spotyka się też nazwę "*hiperpłaszczyzny*"). Dopełnienie takich zbiorów ($X \setminus E_\alpha$) ma dokładnie dwie składowe spójne, więc można powiedzieć, że hiperpłaszczyzny rozcinają przestrzeń X -a w naszej sytuacji, oddzielają zbiory. Aby udowodnić istnienie takiego oddzielania, będziemy potrzebowali pewnego (nieliniowego) funkcjonału p_A.

Definicja 2. Zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem pochłaniającym, gdy

$$\forall_{x \in X} \exists_{a>0} \forall_{b>a} x \in bW.$$

Dla zbiorów wypukłych A jest pochłaniający, gdy $\forall_{x\in X}\exists_{c>0} x \in cA$. Geometrycznie, chodzi o to, by odcinek otwarty łączący punkt x z zerem zawierał w zbiorze A jakiś niezerowej długości odcinek o końcu 0 (tu odcinek $\{\frac{1}{b} \cdot x : a < b\}$). Biorąc $x = 0$, ponieważ $b \neq 0$ -widzimy, że musi być zawsze $0 \in A$. W przypadku zbioru wypukłego wystarczy, by taki odcinek o końcach $x, 0$ miał przynajmniej jeden punkt ze zbioru A.

Definicja 3. Funkcjonałem Minkowskiego (lub "funkcją kalibrującą" (ang. *gauge function*)) dla zbioru pochłaniającego A nazywamy funkcję

$$p_A(x) := \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Wartość $p_A(x)$ odpowiada na pytanie: "ile razy należy powiększyć zbiór A tak, by wchłonąć punkt x". Na przykład, niech $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ oraz $\bar{B} = \{x \in X : p(x) < 1\}$ będą kulami jednostkowymi: otwartą (odp. domkniętą) dla pewnej seminormy (np. normy) p. Wtedy łatwo sprawdzić, że tB jest kulą o promieniu t i stąd już nietrudno wywnioskować, że $p_B = p_{\bar{B}} = p$. Ponadto dla wypukłych A mamy $p_A(x) = 0 \Leftrightarrow \{tx : t > 0\} \subset A$. Tak więc mając daną kulę możemy odtworzyć definiującą ją normę (odp. seminormę). Nie każdy zbiór wypukły i pochłaniający może być kulą (o środku w punkcie 0. Fakrycznie, dla seminorm p i dla liczby λ o module $|\lambda| \leqslant 1$ mamy $p(x) < 1 \Rightarrow p(\lambda x) < 1$. (Dla $\leqslant$ -analogicznie). Kule muszą być absolutnie wypukłe, a w przypadku norm -nie mogą zawierać niezerowych podprzestrzeni liniowych w X.

Ponieważ dla $s > 0$ mamy $sx \in stA \Leftrightarrow x \in A$, zaś dla $E \subset \mathbb{R}_+$ mamy $\inf\{st : t \in E\} = \inf E$, wnioskujemy stąd dodatnią jednorodność p_A: mamy więc $\forall_{s\geqslant 0} p_A(sx) = sp_A(x)$. Zauważmy jeszcze,(= proste ćwiczenie) że:

zbiór $A \subset X$ jest wypukły (odp. absolutnie wypukły) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{s,t>0}\, sA + tA = (s+t)A \quad \texttt{odpowiednio} \quad \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\, \alpha A + \beta A = (|\alpha| + |\beta|)A. \tag{1}$$

Twierdzenie.(H.Minkowski) Gdy zbiór A jest wypukły i pochłaniający, to p_A jest sunkcjonałem subaddytywnym i dodatnio jednorodnym. Zbiór A jest "z dokładnością do brzegu kulą jednostkową względem p_A" czyli

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : p_A(x) \leqslant 1\}. \tag{2}$$

Gdy ponadto A jest absolutnie wypukły, p_A jest seminormą, której jądrem jest największa podprzestrzeń liniowa przestrzeni X zawarta w A. Pierwsza z inkluzji (2) jest równością, gdy A jest otwarty w topologii jakiejś PWT, druga jest równością, gdy jest on domknięty.

Dowód. (szkic)
Jeśli $x \in tA, y \in sA$, to $x + y \in tA + sA = (t + s)A$, więc

$$\{t > 0 : x \in tA\} + \{s > 0 : y \in sA\} \subset \{c > 0 : x + y \in cA\}.$$

Infimum sumy Minkowskiego 2 zbiorów liczbowych to suma ich infimów, zaś infimum nadzbioru jest $\leqslant$ od infimum podzbioru (relacje $\leqslant$ mają kierunek przeciwny do inkluzji dla kresów dolnych), stąd wynika, że

$$p_A(x + y) \leqslant p_A(x) + p_A(y).$$

Jednorodność dodatnią już sprawdziliśmy. Jest to więc "funkcjonał H-B". Dla pełnej jednorodności w przypadku abs. wypukłym wystarczy wziąć dowolne $\lambda \in \mathbb{K}$ takie, że $|\lambda| = 1$ (bo już mamy dodatnią jednorodność) i wykazać, że wtedy $p_A(\lambda x) = p_A(x)$. Do tego przyda się nam równoważność prawdziwa dla ustalonego $t > 0$: $t\lambda x \in A \Leftrightarrow t|\lambda|x \in A$ oraz prawdziwa dla zbiorów $E \subset \mathbb{R}_+$ i dla liczb $c = |\lambda|$ równość kresów: $\inf(cE) = c \inf(E)$. Ale że to szkic -tego fragmentu nie kończę. Gdy $p_A(x) < 1$, to 1 nie jest minorantą zbioru tych $t > 0$, dla których $x \in tA$, czyli istnieje $s < 1, s > 0$ oraz $z \in A$ takie, że $x = sz$. Ale ponieważ $0 \in A$, również kombinacja wypukła: $(1 - s)0 + sz = x$ należy do A, co dowodzi pierwszej inkluzji w (2). Gdy $x \in A$, to $t = 1$ należy do zbioru, którego kresem dolnym jest p_A, stąd $p_A(x) \leqslant 1$. Gdy $p_A(y) < 1$, to już wiemy, że $y \in A$. Gdy teraz $p_A(x) = 1$, za y przyjmijmy wyrazy ciągu $y_n = (1 - \frac{1}{n})x$, z jednorodności wyniknie, że $p_A(y_n) < 1$, więc $y_n \in A$. Ponieważ $\lim y_n = x$, w przypadku zbioru domkniętego otrzymamy $x \in A$. W przypadku A otwartego dla $z \in A$ istnieje $c > 1$ dla którego nadal $cz \in A$, z ciągłości mnożenia ustalonego wektora z przez skalary. Stąd $cp(z) = p(cz) \leqslant 1$,na mocy drugiej z inkluzji (2). □

Definicja 4. *Mówimy, że przestrzeń wektorowa topologiczna X jest lokalnie wypukła, gdy istnieje w niej baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych.*

Topologie opisane przez normy, lub przez rodziny seminorm są, oczywiście, lokalnie wypukłe. Stosunkowo łątwo sprawdzić, że w przestrzeni lokalnie wypukłej istnieje zawsze baza otoczeń absolutnie wypukłych zera. (Gdy zbiór A jest wypukły, to zbiór $\{\lambda x : x \in A, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant 1\}$ jest już absolutnie wypukły. Wystarczy teraz wybierać wypukłe otoczenia zera,które są podzbiorami jakiejś bazy otoczeń zbalansowanych zera.) Mamy wtedy dla każdego otwartego, absolutnie wypukłego otoczenia zera U seminormę p_U, której kule są otwarte w topologii X (są postaci rU), rodzina tych kul (indeksowana przez zbiory U) określi więc taką samą topologię. Można więc zapytać, kiedy topologię da się określić nie przez rodzinę seminorm, ale przez 1 normę? Odpowiedź znalazł Kołmogorow. Wykazał, że **to zachodzi w lokalnie wypukłej przestrzeni Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jakieś ograniczone otozcenie zera.** Oczywiście, potrzebna jest tu jeszcze jedna definicja:

Definicja . Zbiór E w PWT X jest ograniczony, gdy "jest pochłaniany przez dowolne otoczenie zera: $\forall_U$ jeśli U jest otoczeniem zera, to $\exists_{t>0} E \subset tU$. (W definicji zbioru pochłaniającego A każdy punkt miał być pochłonięty, tu trzeba "połknąć" cały zbiór E). Ten fragment (poniżej definicji 4.) miał charakter informacyjny.

Teraz już możemy sformułować twierdzenie o oddzielaniu zbiorów.

Twierdzenie. Zbiory wypukłe, rozłączne A,B w przestrzeni wektorowej topologicznej X można rozdzielić pewnym funkcjonałem liniowym ciągłym ϕ, jeśli zachodzi przynajmniej jeden z następujących warunków.

(i) Zbiór A jest otwarty, zaś B -jednoelementowy $(B = \{x_0\})$;

(ii) Jeden ze zbiorów A, B jest otwarty;

(iii) Przestrzeń jest lokalnie wypukła, zbiór A jest domknięty, B jest jednoelementowy.

Zauważmy, że w sytuacji (i) lub (iii) oddzielamy punkt od zbioru domkniętego. W przypadku zespolonym traktujemy przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$ jako również przestrzeń rzeczywistą. Mając funkcjonał $\mathbb{R}$-liniowy $\phi : X \to \mathbb{R}$ oddzielający te zbiory tworzymy funkcjonał $\mathbb{C}$- liniowy wzorem $f(x) := \phi(x) - i\phi(ix)$ ($f =$ tzw. kompleksyfikacja ϕ) i jego własność oddzielania wynika z Definicji 1. WYSTARCZY WIĘC ROZPATRYWAĆ PRZYPADEK RZECZYWISTY.

Dowód. Przesunięcia równoległe są homeomorfizmami i funkcjonał oddzielający zbiory A, B oddziela też zbiory $A - a_0$ oraz $\{x_0 - a_0\}$, z których pierwszy jest otwarty (przy założeniach (i)) i zawiera 0, jeśli $a_0 \in A$. Bez straty ogólności można więc przyjąć, że A jest otwartym otoczeneim zera. Wtedy zbiór A jest pochłaniający i jego funkcjonał Minkowskiego p_A jest < 1 na zbiorze A oraz $\geqslant 1$ dla $x_0 \notin A$. Na jedno-wymiarowej podprzestrzeni $\mathbb{R} \cdot x_0$ zdefiniujmy $\phi(tx_0) := tp_A(x_0)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Ponieważ $p_A \geqslant 0$, dla $t \leqslant 0$ nierówność $\phi \leqslant p_A$ zachodzi na tej półprostej $\{tx_0 : t \leqslant 0\}$. Dla $t = 1$ też jest już oczywista, a dla pozostałych $t > 0$ wynika z dodatniej jednorodnosci p_A. Przedłużenie liniowe z zachowaniem nierównosci $\phi \leqslant p_A$ na całąprzestrzeń X oznaczmy dalej tą samą literą ϕ. Będzie to funkcjonał oddzielający punkt x_0 od zbioru A.

Przy założeniach punktu (ii) niech $A - B := \{a - b : \, b \in B, \, a \in A\}$. Rozłączność zbiorów oznacza tu, że $0 \notin A - B$. Ponadto zbiór $A - B$ jest otwarty, jako suma $\bigcup_{b\in B} A - b$ przesunięć zbioru otwartego. Udowodniony już fragment (i) twierdzenia dostarcza nam funkcjonału (np. ψ) oddzielającego punkt 0 (zero) od zbioru otwartego $A - B$ (jego wypukłość jest niemal oczywista- trzeba rozpisać kombinację wypukłą punktów $a_1 - b_1$ oraz $a_2 - b_2$ jako różnicę dwu kombinacji wypukłych z odpowiednich zbiorów). Ale skoro $\psi(a-b) \neq 0$, dla dowolnych $a \in A, b \in B$, to rozłączne są zbiory $\psi(A), \psi(B)$ (które są przedziałami, jako wypukle podzbiory w $\mathbb{R}$). To dowodzi, że ψ jest szukanym funkcjonałem oddzielającym.

Ad (iii). Punkt nienależący do zbioru domkniętego ma otoczenie rozłączne z tym zbiorem. W przestrzeni lokalnie wypukłej można (biorąc zbiór mniejszy wrazie potrzeby) założyć, że jest to otwarte, wypukłe otoczenie punktu x_0 -rozłączne z A. Teraz oddzielamy od zbioru A całe to otoczenie, wykorzystując punkt (ii). W każdym przypadku mamy więc obraz przez funkcjonał oddzielający pewnego niepustego zbioru otwartego -różny od całego $\mathbb{R}$, co gwarantuje, jak już wiemy, ciągłość funkcjonału. (Zachowa się ona też, rzecz jasna, po kompleksyfikcji).$\square$