6 Bazy ortonormalne

Zacznę od uzupełnienia dowodu twierdzenia o własnościach sprzężenia operatorów ograniczonych. Przypomniejmy że dla $T \in \mathcal{B}(H), y \in H$ definiujemy wektor T^*y tak, by zachodziła relacja

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad x \in \mathcal{D}(T). \tag{1}$$

Nawet w przypadku ogólniejszym operatorów gęsto określonych ta relacja wyznacza jednoznacznie wektor T^*y. Z tej jednoznaczności wnioskujemy o liniowości T^*. Na przykład, dla $y_1, y_2 \in H$ dodając stronami relacje (1) -otrzymamy

$$\forall_x \ \langle Tx, y_1 + y_2\rangle = \langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \langle x, T^*y_1 + T^*y_2\rangle,$$

zaś lewa strona dzięki (1) równa jest $\langle x, T^*(y_1 + y_2)\rangle$, stąd $T^*(y_1 + y_2) = T^*y_1 + T^*y_2$. Analogicznie sprawdzamy jednorodność T^*. Z definicji normy operatora i z dualnego wzoru na normę

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\},$$

podczas, gdy $\|T^*\| = \sup\{|\langle x, T^*y\rangle| : \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$, więc dzięki (1) te normy są równe.

Analogicznie sprawdzamy tezę 2. pamiętając, że skalary wyłączają się przed iloczyn skalarny z prawej strony ze sprzężeniem. Dla dowodu 3. stosujemy dwukrotnie relację (1) -najpierw dla S, później dla T: mamy

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle.$$

Równość $I^* = I$ jest oczywistym wnioskiem z (1). Natomiast $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, T^{**}y\rangle$ Prawa strona jest liczbą sprzężoną do $\langle T^{**}y, x\rangle$, zaś lewa -sprzężoną do $\langle Ty, x\rangle$, co dowodzi równości 4. $\square$.

Wnioskiem o podstawowym znaczeniu (wynikającym z równości 3. i 4.) jest samosprzężoność operatora T^*T. Wkrótce wykażemy, że dla operatorów samosprzężonych ograniczonych (czyli gdy $S^* = S \in \mathcal{B}(H)$) mamy

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Sx, x\rangle.$$

Stosując ten wzór dla $S = T^*T$, otrzymujemy tak zwaną tożsamość C*:

$$\forall_{T\in\mathcal{B}(H)} \ \|T\|^2 = \|T^*T\|.$$

Jeśli przestrzeń Banacha ma dodatkowo strukturę algebry z inwolucją * spełniającą warunki 2.,3., 4. i tożsamość C* oraz $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$, to tak zwana konstrukcja GNS (Gelfanda -Naimarka - Segala) pookazuje, że ta algebra jest izometrycznie i algebraicznie izomorficzna z pewną C* -podalgebrą w $\mathcal{B}(H)$ dla pewnej przestrzeni Hilberta H. Teoria takich algebr (znana też pod nazwą "niekomutatywna geometria") jest jedną z intensywnie rozwijanych gałęzi teorii operatorów, powiązaną z zastosowaniami w mechanice kwantowej.

Dalsze własności operatorów samosprzężonych (oraz normalnych) poznamy w następnych wykładach.

6.1 Bazy

Pojęcie bazy w algebrze liniowej jest powiązane z jednoznaczną reprezentacją każdego wektora danej przestrzeni w postaci (skończonej!) kombinacji liniowej elementów tej bazy. Niestety, w przestrzeniach Banacha nieskończenie wymiarowych takie bazy algebraiczne (zwane bazami Hamela) są użyteczne jedynie przy konstrukcji kontrprzykładów, bądź funkcjonałów liniowych nieciągłych. Hamel, używając pewnika wyboru, rozwiązał negatywnie problem pochodzący od Cauchy'ego: "czy każdy funkcjonał addytywny na $\mathbb{R}$ jest postaci $t \mapsto \alpha t$ dla pewnej liczby α ?". Takie odwzorowanie musi być też jednorodne względem skalarów wymiernych. Traktując $\mathbb{R}$ jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych Hamel "skonstruował" bazę, na niej dowolne odwzorowanie przedłuża się do odwzorowania liniowego (nad $\mathbb{Q}$) - i to dało kontrprzykład. Był to funkcjonał nieciągły. W przestrzeni zupełnej X nigdy nie istnieje przeliczalna baza Hamela ($\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$:

Wymiar przestrzeni Banacha, jeśli nie jest skończony, musi być nieprzeliczalny.

Faktycznie, gdyby przeliczalna baza istniała, to X będzie sumą przeliczalną podprzestrzeni $M_n := \mathtt{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, bo każdy jej wektor jest skończoną kombinacją liniową wektorów z bazy. Podprzestrzenie właściwe mają puste wnętrze, podprzestrzenie skończenie wymiarowe są domknięte, więc każdy zbiór M_n jest nigdzie-gęsty. Ich suma mnogościowa -na mocy twierdzenia Baire'a -ma puste wnętrze. Nie może być równa X (sprzeczność). Chyba to rozumowanie przedstawiałem na wykładzie. Jeśli teraz X zawiera jakiś przeliczalny podzbiór gęsty D (wystarczy, by jego span był gęsty),to każdy funkcjonał liniowy ciągły będzie zdeterminowny przez swoje wartości na tym zbiorze D, ilość wszystkich możliwych funkcji na D nie przekracza $\aleph_0^{\mathfrak{c}}$ i jest silnie mniejsza od $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Stąd zacznie więcej jest funkcjonałów liniowych nieciągłych na X, niż ciągłych.

Praktyczne znaczenie mają jedynie układy przeliczalne generujące przestrzenie ośrodkowe.

Definicja. Ciąg $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy bazą Schaudera w przestrzeni X, gdy dla każdego wektora $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów α_n taki, że

$$x = \sum_{n-1}^{\infty} \alpha_n e_n \qquad \texttt{(szereg zbieżny w topologii normy).} \tag{2}$$

Schauder (uczeń Banacha) skonstruował bazę w przestrzeni $C[0,1]$, bazy skonstruowano później też w większości znanych ośrodkowych przestrzeni Banacha. Dopiero w latach 70-tych szwedzki matematyk (i pianista) Per Enflo skonstruował przestrzeń ośrodkową niemającą żadnej bazy Schaudera, rozwiązując tym samym problem S. Mazura z Księgi Szkockiej (nagrodą była żywa gęś, której jednak nie mógł wywieźć z Warszawy, ze względu na przepisy celne). Bardzo łatwo zauważyć, że w każdej z przestrzeni ciągowych $\ell^p, 1 \leqslant p < \infty$ bazą Schaudera jest ciąg kanoniczny 0-1 -kowy, w którym e_n jest ciągiem z jedynym niezerowym wyrazem -jedynką na n-tym miejscu. Wykażemy, że każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta H ma bazę Schaudera- co więcej, istnieje w niej baza ortonormalna. Ponadto odwzorowanie przypisujące wektorowi $x \in H$ jego ciąg współczynników - przyjmuje wartości w ℓ^2 i jest izometrycznym izomorfizmem. W pewnym sensie, jest (z dokładnością do izomorfizmu) tylko jedna ośrodkowa przestrzeń Hilberta.

Definicja. Układ wektorów $\{e_j\}_{j\in J} \subset H$ jest ortogonalny, gdy

$$\forall_{j,k\in J}\ (j \neq k) \Rightarrow e_j \perp e_k.$$

Układ ten jest ortonormalny, gdy jest ortogonalny oraz $\forall_j\, \|e_j\| = 1$. Uklad jest zupełny, gdy jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich e_j jest wektor zerowy. Bazą ortogonalną (odp. ortonormalną) nazywamy układ zupełny, który jest ortogonalny (odp. ortonormalny).

Pierwszym krokiem w konstrukcji baz ortonormalnych jest tzw. proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Twierdzenie.(Gram-Schmidt Jeżeli tylko ciąg wektorów $v_n \in H$ jest liniowo niezależny, to istnieje ciąg ortonormalny złożony z takich wektoów e_n, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ jest span$\{v_1, \dots, v_k\}$ =span$\{e_1, \dots, e_k\}$.

Dowód. Oznaczmy przez M podprzestrzeń span$\{v_1, \dots, v_k\}$ i skonstruujmy ciąg ortogonalny f_n rekurencyjnie -przyjmując $f_1 = v_1$, mając zaś już określone $f_1, \dots, f_k$ zdefiniujmy $f_{k+1} = v_{k+1} - P_M v_{k+1}$. Ze znanej własności rzutu, $f_{k+1} \perp M$, w szczególności $\forall_{j<k+1} f_{k+1} \perp f_j$. Teraz łatwo zauważyć, (np. metodą indukcji), że span$\{v_1, \dots, v_k\}$ =span$\{f_1, \dots, f_k\}$. Po "unormowaniu", czyli

definiując $e_n = \frac{1}{\|f_n\|} f_n$ otrzymamy układ ortonormalny spełniający nasze wymagania. $\square$

Twierdzenie. W każdej przestrzeni Hilberta H istnieje baza ortonormalna.

W przestrzeniach ośrodkowych taką bazę stanowi pewien ciąg wektorów.

Dowód. Rozważmy rodzinę $\mathcal{A}$ wszystkich układów ortonormalnych w H. Aby wykazać, że (w sensie relacji zawierania) istnieje w tej rodzinie element maksymalny, weźmy dowolny łańcuch (czyli liniowo uporządkowany podzbiór $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$). Oczywięcie, jego suma: $\bigcup \mathcal{L}$ jest też układem ortonormalnym i jest to majoranta tego łańcucha. Z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieją maksymalne układy ortonormalne. Gdyby taki układ nie był zupełny, pewien wektor niezerowy byłby do niego prostopadły. Po "unormowaniu" tego wektora -jak w procesie grama-Schmidta -otrzymamy większy o 1 element układ ortonormalny, co przeczy maksymalności. Gdy w przestrzeni H mamy nieprzeliczalny układ ortonormalny, to dla $j \neq k$ z tw. Pitagorasa widzimy, że $\|e_j - e_k\|^2 = 2$, więc kule o środkach e_j i promieniach $\frac{1}{2}$ są tu parami rozłączne. To wyklucza ośrodkowaść, gdyż podzbiór gęsty musi mieć w każdej z takich kul jakieś swoje punkty. $\square$

Uwaga. Powyższy dowód ma zastosowanie również w przestrzeniach nieośrodkowych -wówczas otrzymujemy bazę ortonormalną $(e_j)_{j \in J}$, gdzie zbiór J jest nieprzeliczalny. Bazy Schaudera definiowaliśmy tylko w przyadku ośrodkowym. Będziemy jednak w stanie przedstawić w przypadku nieośrodkowym dowolny wektor $x \in H$ w postaci sumy nieskończonej

$$\sum_{j \in J} \alpha_j e_j, \quad \texttt{gdzie} \quad \alpha_j = \langle x, e_j \rangle. \tag{3}$$

Okaże się, że $\alpha_j \neq 0$ jedynie dla przeliczalnie wielu $j \in J$ tworzących (zależny od x) zbiór $J_x = \{j_n : n \in \mathbb{N}\}$, zaś suma (3) rozumiana jako granica uogólniona jest równa sumie bezwarunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{j_n} e_{j_n}$. Przy tym sam ciąg j_n zależy od wyboru rozwijanego wektora x. Może warto w tym miejscu sprecyzować, jak rozumiemy sumy nieskończone typu (3).

Definicja taka jest używana w ogólnej sytuacji abelowych grup topologicznych (w zapisie addytywnym). A więc niech $\mathcal{F}(J)$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru J, jest to rodzina skierowana przez relację zawierania. Dla uproszczenia, w naszej sytuacji zapiszmy $y_j := \alpha_j e_j$. Wówczas sumę nieskończoną $S = \sum_{j \in J} y_j$ definiujemy jako granicę ciągu uogólnionego $(S_K)_{K \in \mathcal{F}}$, gdzie dla $K = \{j_1, \dots j_m\}$ definiujemy $S_K := \sum_{n=1}^{m} y_{j_n}$. Ostatnia (skończona) suma nie zależy od sposobu ustawienia zbioru K w powyższy ciąg skończony, dzięki przemienności i łączności dodawania (tu dodawania wektorów w H). Zapis $S = \sum_{j \in J} y_j$ oznacza, że dla dowolnie wybranego otoczenia U punktu S (w rozważanej w danej grupie ropologii -tu w topologii normy przestrzeni H) istnieje zbiór skończony $K_U \in \mathcal{F}$ taki, że gdy $K \in \mathcal{F}$ oraz $K_U \subset K$, to $S_K \in U$. Można wykazać, że takie sumy nieskończone nie zależą od permutacji zbioru J i gdy H jest ciałem skalarów, taka zbieżność gwarantuje również sumowalność modułów liczb, ilość niezerowych składników jest wówczas co najwyżej przeliczalna. Wówczas taka nieskończona suma liczb jest równa sumie szeregu (bez względu na to, w jakiej kolejności ustawimy niezerowe składniki). Suma nieskończonej ilości liczb nieujemnych, to kres górny (supremum) zbioru ich sum skończonych. Za chwilę wykażemy nierówność Bessela, $\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leqslant \|x^2\|$, która jest dość prostą konsekwencją twierdzenia Pitagorasa. Daje to właśnie niezerowanie się jedynie przeliczalnej ilości współczynników. Więc do roboty...

Załóżmy obecnie, że $\{e_j\}$ jest układem (jak ktoś woli łatwiej, to ciągiem) ortonormalnym, niekoniecznie zupełnym

Twierdzenie (Nierówność Bessela). Ciąg współczynników $\langle x, e_j \rangle$ wektora $x \in H$ jest sumowalny z kwadratem i jego norma w ℓ^2 nie przekracza $\|x\|$.

Zapis tej nierówności dla dowolnych układów ortonormalnych i dla ciągów - odpowiednio ma postać:

$$\sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (\textit{odpowiednio}, \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2). \tag{4}$$

Dowód. Niech dla skończonnego zbioru indeksów $K \subset J$ (odpowiednio, dla $K = \{1, 2, \dots, k\}$) symbol S_K oznacza "sumę częściową abstrakcyjnego szeregu Fouriera: $S_K := \sum_{j\in K}\langle x, e_j\rangle e_j$ (w drugim przypadku jest to $\sum_{j=1}^{k}$ ...). Jest to suma wzajemnie prostopadłych wektorów, przy czym S_K jest rzutem ortogonalnym wektora x na podprzestrzeń skończenie wymiarową $M_K := \mathtt{span}\{e_j : j \in K\}$. Faktycznie, $S_K \in M_K$, zaś ortogonalność $x - S_K \perp M_K$ wystarczy sparawdzić tylko dla generatorów M_K, czyli dla wektorów $e_m, m \in K$. TO proste przeliczenie: $\langle S_K - x, e_m\rangle = \sum_{j\in K}(\langle x, e_j\rangle e_j), e_m) - \langle x, e_m\rangle$. Ale $\langle e_j, e_m\rangle = \delta_{j,m}$ (symbol Kroneckera) i z całej sumy wszystkie składniki z wyjątkiem tego dla $j = m$ zerują się i całę nasze wyrażenie równa się zero. Z twierdzenia Pitagorasa dla rozkładu $x = P_K x + (x - P_K x)$ na sumę dwu wektorów prostopadłych wnioskujemy, że $\|P_K x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Ale ponownie stosując tw. Pitagorasa do sumy wektorów prostopadłych, mamy

$$\|P_K x\|^2 = \sum_{j\in K} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Lewa strona dowodzonej nierówności, to kres górny takich sum po $j \in K$, więc też jest nie większa, niż $\|x\|^2$. $\square$

Dowody następnego twierdzenia (i jego wypowiedź) można bez trudu uogólnić na sumy nieskończone, my ograniczymy się do ciągów. Tym razem (w dowodzie) użyjemy oznaczenia P_n dla projekcji ortogonalej na zbiór $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Twierdzenie. Dla ciągu ortonormalnego $\{e_n;\, n < \infty\}$ następujące warunki są równoważne:

(i) Układ ten stanowi bazę przestrzeni H,

(ii) w nierówności Bessela mamy równość (tzw. Tożsamość Parsevala):

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \qquad (\forall x \in H), \tag{TP}$$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - \sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\| = 0 \qquad (\forall x \in H).$

Dowód. Warunek (i) oznacza, że podprzestrzeń $M := \text{span}\{e_j;\, n < \infty\}$ jest równa H. W przeciwnym przypadku istniałby wektor $z \in H \ominus M \setminus \{0\}$. Z relacji $z \perp e_j$ $(\forall e_j)$ wynika zerowanie się prawej strony nier. Bessela (oraz (TP)), w odróżnienu od lewej. Natomiast gdy $M = H \ni x$, to ciąg $P_n x$ jest ciągiem Cauchy'ego, co wynika z nier. Bessela (konkretnie, z sumowalności kwadratów współczynników) stosowanej do $\|P_m x - P_n x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle x, e_j\rangle|^2$. Jeżeli $y = \lim P_n x$, to $\langle x - y, e_j\rangle = 0$ $(\forall j)$, skąd wynika równość $x = y$, czyli (iii). Na koniec, z równości (TP) wynika liniowa gęstość zbioru $\{e_j; j < \infty\}$, gdyż jedynym wektorem doń prostopadłym jest 0. $\square$

Wnioskiem z dotychczas poznanych własności baz jest twierdzenie mówiące, że *z dokładnnością do unitarnej równoważności jest tylko jedna ośrodkowa przestrzeń Hilberta:* ℓ^2.

Twierdzenie. (RIESZ, FISCHER).Ustalmy bazę ortonormalną $\{e_n\}$ przestrzeni H.

(i) Jeżeli ciąg skalarów jest sumowalny w kwadracie: $\alpha := \{\alpha_n\} \in \ell^2$, to

$$\Phi(\alpha) := \sum_j \alpha_j e_j$$

jest szeregiem zbieżnym.

(ii) Tak określone odwzorowanie $\Phi : \ell^2 \to H$ jest izomorfizmem unitarnym[1].

Dowód. Tożsamość Parsevala (a właściwie, twierdzenie Pitagorasa) stosowana do $x = x_m - x_n$, gdzie $x_k = \sum_1^k \alpha_j e_j$ dowodzi, że dla $\alpha \in \ell^2$ ciąg $\{x_n\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, a jego granicą jest $\Phi(\alpha)$. Izometryczność Φ jest dokładnie tożsamością (TP). Surjektywność można uzyskać zauważając, że dla $h \in H$ ciąg współczynników: $\alpha_j = \langle h, e_j \rangle$ jest „sumowalny z kwadratem", tzn $\alpha \in \ell^2$ (dzięki nier. Bessela lub (TP)). Ponadto mamy relacje $h - \Phi(\alpha) \perp e_j$ $(\forall j)$, a więc $h = \Phi(\alpha)$. $\square$

Wynik tej obserwacji, czyli relację $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_H$ zapiszmy w postaci

$$x = \sum_1^\infty \langle x, e_j \rangle e_j \tag{SF}$$

Wzór ten nazywamy **rozwinięciem wektora** x **w szereg ortogonalny** lub **(abstrakcyjnym) szeregiem Fouriera** wektora x w bazie $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Izometryczność Φ^{-1} jest zarazem równoważna relacji

$$\langle x, y \rangle = \langle \Phi^{-1}x, \Phi^{-1}y \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle. \tag{TP2}$$

Rzeczywiście, obydwie strony relacji (TP2) są formami liniowymi względem zmiennej x, zaś antyliniowymi względem zmiennej y. Formy te pokrywają się na „przekątnej" zbioru $H \times H$, czyli na zbiorze par (x, y), dla których $x = y$ (na mocy (TP)). Wzór polaryzacyjny, w którego dowodzie nie korzysta się z relacji $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$, dowodzi równości tych dwu form już na zbiorze wszystkich par $(x, y) \in H \times H$.

[1] czyli bijekcją liniową, zachowującą iloczyn skalarny