9 Operatory normalne, widma

Możemy obecnie przejść do teorii spektralnej operatorów w przestrzeniach Hilberta H nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Na wstępie zdefiniujmy klasę operatorów, która dla tej teorii ma podstawowe znaczenie

Definicja. Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ nazywamy operatorem normalnym, gdy jest on przemienny ze swoim sprzężeniem: $TT^* = T^*T$. (W przypadku operatorów gęsto określonych nieograniczonych istnieje nieco bardziej skomplikowana definicja oparta częściowo na poniższym warunku równoważnym).

Lemat. Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ jest normalny wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego wektora $x \in H$ zachodzi równość:

$$\|T^*x\| = \|Tx\| \tag{1}$$

Dowód implikacji $\Rightarrow$ polega na prostym przeliczeniu kwadratów norm:

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Dla dowodu $\Leftarrow$ mamy z ostatnich równości zastosowanych do warunku (1) następujcy wniosek: jeśli ten "warunek metryczny" zachodzi, to formy półtoraliniowe operatorów TT^* oraz T^*T są równe. Jest to wniosek bezpośredni ze wzoru polaryzacyjnego (punkt 4. Twierdzenia z wykładu z numerem 4 "Przestrzenie Hilberta (wstęp)"). Co prawda dla dowolnych form półtoraliniowych w przestrzeniach rzeczywietych (gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) wzór polaryzacyjny nie obowiązuje, ale zachodzi on dla operatorów samosprzężonych (nawet w przypadku rzeczywistym). A tu porównujemy dwa operatory samosprzężone: TT^* oraz T^*T. Jeśli S oznacza różnicę tych operatorów, to $S = S^*$ i wystarczy sprawdzić, że (1) implikuje równość $S = 0$. Wynika z niego dzięki przytoczonym na początku dowodu równościom, że $\forall_x \Omega_S(x) := \langle Sx, x\rangle = 0$ i ze wzoru polaryzacyjnego wnioskujemy, że $\forall_{x,y\in H}\omega_S(x, y) := \langle Sx, y\rangle = 0$, co po wstawieniu $y = Sx$ daje równość $S = 0$. $\square$

Zauważmy, że z samej definicji wynika, że suma operatorów normalnych jest operatorem normalnym. W szczególności, gdy $N \in \mathcal{B}(H)$ jest normalny oraz $\lambda \in \mathbb{K}$, to również operator $N - \lambda I$ jest normalny. I bedzie zawsze oznaczał operator identyczności na H. Wkrótce tę obserwację wykorzystamy. Zacznijmy jednak od paru przykładów operatorów normalnych.

Przykład 1. Każda projekcja ortogonalna, ogólniej: każdy operator samosprzężony jest normalny. Iloczyn skalara (zespolonego lub rzeczywistego) przez operator normalny jest operatorem normalnym.
Przykład 2. Na przestrzeni $L^2(\mu) = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ operatory M_ϕ mnożenia przez funkcje mierzalne ograniczone $\phi \in L^\infty(\mu)$ są normalne. tworzą one podalgebrę przemienną w $\mathcal{B}(L^2(\mu))$. Faktycznie, ich definicja: $(M_\phi f)(\omega) = \phi(\omega)f(\omega)$ (z dokładnością do równości p.w.$[\mu]$) implikuje w dość oczywisty sposób równości:

$$(M_\phi)^* = M_{\bar{\phi}}, \quad M_\psi M_\varphi = M_{\psi\cdot\varphi}.$$

Przykład 3. Niech $\ell^2(\mathbb{Z})$ będzie przestrzenią obustronnie nieskończonych ciągów o współczynnikach "sumowalnych z kwadratem", gdzie kanoniczną bazę tworzą ciągi ϵ_n równe zero z wyjątkiem n-tego wyrazu równego 1. Definiujemy operator dwustronnego przesunięcia N tak, by $N\epsilon_n = \epsilon_{n+1}$. Jest to operator izometryczny, surjektywny, jego odwrotny jest równy N^*, więc komutuje z N. Operator ten znany jest pod nazwą "przesunięcie dwustronne" (ang. "bilateral shift").

Podprestrzeń w $\ell^2(\mathbb{Z})$ rozpięta na wektorach $\epsilon_n : n = 0, 1, 2, \ldots$ może być utożsamiana z $\ell^2(\mathbb{N})$. Są to sumowalne z kwadratem ciągi $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ indeksowane przez wskaźniki całkowite j, dla których $x_j = 0$ dla ujemnych j. Podprzestrzeń tę oznaczmy H^2.

Ma ona związek z tzw. przestrzenią Hardy'ego $H^2(\partial\mathbb{D})$ tych funkcji $f \in L^2[-\pi,\pi]$, których współczynniki Fouriera $\hat{f}[-n] := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt$ są dla $n \in \mathbb{N}$ równe zero. Takie funkcje określają szeregi Taylora o promieniu zbieżności $R \geqslant 1$, więc definiują one (oznaczmy je tę samą, ale dużą literą F) analityczne funkcje w kole jednostkowym $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Konkretnie, dla $z \in \mathbb{D}$ mamy $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$, gdzie $x_n = \lim_{r\to 1^-} \hat{F}_r[n]$, jeśli dla $r < 1$ określić na okręgu jednostkowym funkcje $F_r(e^{i\theta}) := F(re^{i\theta})$. Hardy zauważył, że dla funkcji F analitycznych w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ normy (względem miary Lebesgue'a): $\|F_r\|_2 = (\int_{-\pi}^{\pi} |F_r(e^{i\theta})|^2\,d\theta)^{\frac{1}{2}}$ tworzą funkcję niemalejącą, jej supremum, to ℓ^2- norma ciągu współczynników Taylora dla F (jeśli jest ona skończona). Definiujemy przestrzeń Hardy'ego w kole jednostkowym jako przestrzeń

$$H^2(\mathbb{D}) := \{F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : F \texttt{ jest analityczna oraz } \|F\| := \sup_{0<r<1} \|F_r\|_2 < \infty\}. \tag{2}$$

Można wykazać, że odwzorowania: $H^2(\partial\mathbb{D}) \ni f \mapsto (\hat{f}[n] \in H^2$ oraz $H^2(\partial\mathbb{D}) \ni f \to F$ (określona powyżej) są izometrycznymi izomorfizmami (również surjektywnymi) przestrzeni Hilberta) H^2, $H^2(\partial\mathbb{D})$, $H^2(\mathbb{D})$, przestrzenie te są w naturalny sposób izometrycznie utożsamiane. Każda funkcja $f \in H^2(\mathbb{D})$ ma dla prawie wszystkich $\theta \in [-\pi,\pi]$ granice radialne

$$f(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} F(re^{i\theta}), \quad \texttt{czyli } f = \lim F_r,$$

przy czym zbieżność jest w normie $L^2[-\pi,\pi]$. Odwzorowanie to przekształcające $F \in H^2(\mathbb{D})$ w $f \in H^2(\partial\mathbb{D})$ jest bijekcją odwrotną do wcześniej opisanej: $f \mapsto F$. Ta ostatnia może też być *explicite* wyrażona tzw. wzorem całkowym Poissona.

Wróćmy teraz do operatora przesunięcia dwustronnego N na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Podprzestrzeń $H^2 \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ jest dla niego podprzestrzenią niezmienniczą, czyli $N(H^2) \subset H^2$, więc możemy zdefiniować jego zawężenie do H^2 jako tzw. operator przesunięcia jednostronnego (unilateral shift, or "the shift operator")

$$S := N|_{H^2} \in \mathcal{B}(H^2), \quad S(e_n) = e_{n+1}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Jak łatwo sprawdzić, powyższe izomorfizmy przekształcają S na operator mnożenia przez zmienną niezależną, czyli przez $e^{i\theta}$ w $H^2(\partial\mathbb{D})$, odpowiednio - mnożenia $F(z)$ przez z w przestrzeni $H^2(\mathbb{D})$. Każdy z tych trzech operatorów (oznaczanych tym samym symbolem S - jest izometrią, ale żaden z nich nie jest ani odwracalny, ani nirmalny.

Faktycznie, o ile $S^*S = I$, to złożnie w przeciwnym kierunku: SS^* jest projekcją ortogonalną. Jej jądro jest nietrywialne -składa się dokładnie z funkcji stałych. Faktycznie, nawet $S^*e_0 = 0$. Dla $n \in \mathbb{N}$ jest natomiast: $S^*\epsilon_n = \epsilon_{n-1}$. Na modelu w przestrzeni $H^2(\mathbb{D})$ mamy $(S^*F)(z) = \frac{F(z)-F(0)}{z}$. Na okręgu jednostkowym $\frac{1}{z} = \bar{z}$ (sprzeżenie zespolone), więc w $H^2(\partial\mathbb{D})$ mamy $(S^*f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}(f(e^{i\theta}) - \hat{f}[0])$. Na każdej z tych 3 przestrzeni S^*S jest identycznością. Natomiast SS^* jest projekcją ortogonalną na dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni jednowyiarowej: $span\{\epsilon_0\}$ -do przestrzeni H^2, lub projekcją na dopełnienie ortogonalne funkcji stałych w pozostałych dwu przestrzeniach.

Dla nas szczególnie ważny będzie opis widma operatorów normalnych.

Definicja. Widmem operatora $T \in \mathcal{B}(H)$ nazywamy zbiór

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \texttt{ nie jest odwracalny w algebrze } \mathcal{B}(H).$$

W zależności od przyczyny nieodwracalności (nieinjektywność, neograniczoność z dołu, pozostałe) definiujemy części widma: widmo punktowe: σ_p widmo aproksymatywne σ_{ap}, czy widmo residualne (...). Najważniejsze będą 2 pierwsze:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\} \quad \texttt{widmo punktowe},$$

$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\{\|Tx - \lambda x\| : \|x\| = 1\} = 0\}$ `widmo aproksymatywne`.

Widmo punktowe- czyli zbiór wartości własnych - może być zbiorem pustym, np. dla operatora mnożenia przez z w przestrzeni $L^2(\partial D$, dla przesunięć: obustronnego i jednostronnego. Mamy zawsze inkluzje:

$$\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T), \tag{3}$$

które mogą być ostre. Co ważniejsze, jak zobaczymy, widmo zawsze jest zbiorem niepustym, zwartym, zawartym w kole $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$.

Dla zbiorów $A \subset \mathbb{C}$ niech $[A]^*$ oznacza ich obraz przez symetrię względem osi rzeczywistej, czyli zbiór $[A]^* := \{\bar{\alpha} : \alpha \in A\}$ sprzężeń zespolonych wszystkich liczb ze zbioru A.

Twierdzenie. Zawsze $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup [\sigma_p(T^*)]^*$. Natomiast dla operatorów normalnych N zawsze jest

$$\sigma(N) = \sigma_{ap}(N).$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że wzory na sprzężenie iloczynu operatorów (i fakt, że $I^* = I$) implikują, ze T^* jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy T jest odwracalny oraz, że $\sigma_p(T^*) \subset [\sigma(T)]^*$. Stąd i z inkluzji (3) wynika zawieranie "$\supset$" w pierwszej równości. Wystarczy więc dla jej dowodu wykazać, że gdy $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$, to już musi być $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Ale ponieważ wtedy $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, operator $T - \lambda I$ jest wówczas ograniczony z dołu, czyli jest on bijekcją na pewną podprzestrzeń $R := \{Tx - \lambda x : x \in H\}$. Ograniczoność od dołu (i ciągłość) implikuje, że $T - \lambda I : H \to R$ jest izomorfizmem przestrzeni unormowanych, co dzięki zupełności H implikuje zupełność, a więc i domkniętość R. Gdyby R była podprzestrzenią gęstą, musielibyśmy mieć $R = H$ i $T - \lambda I$ było by odwracalne, ale takie być nie może, gdyż $\lambda \in \sigma(T)$. Więc istnieje wektor $y \in H$ prostopadły do R. Proszę sprawdzić, że wtedy $y \in \ker(T - \bar{\lambda})$, korzystając jedynie z definicji operatora sprzężonego i z relacji prostopadłości y do wszystkich wektorów postaci $Tx - \lambda x$ (to mamy $\forall_{x \in H}$).

Dla dowodu drugiej części skorzystajmy z normalności operatora $N - \lambda I$ (w postaci warunku metrycznego). Wtedy dla $\lambda \in \sigma(N) \setminus \sigma_{ap}(N)$ mielibyśmy, na posdtawie udowodnionej już równości, że $Ny - \bar{\lambda} y = 0$ dla pewnego $y \in H, y \neq 0$. Warunek metryczny daje wtedy równość:

$$0 = \|Ny - \bar{\lambda} y\| = \|Ny - \lambda y\|,$$

co wobec $y \neq 0$ daje $\lambda \in \sigma_p(N)$. To dzięki inkluzji $\sigma_p(N) \subset \sigma_{ap}(N)$ daje sprzeczność. $\square$

Warto wspomnieć, że w niektórych tekstach widmo aproksymatywne operatora ("approximate point spectrum") bywa oznaczane symbolem $\sigma_\pi(T)$ lub $\pi(T)$.

Ponadto -widmo elementu a możemy określić w analogiczny sposób w dowolnej algebrze Banacha $\mathcal{A}$ z jedynką $\mathbf{1}$ poprzez warunek nieodwracalności w tej algebrze elementu $a - \lambda\mathbf{1}$.

Założenie normalności w drugiej części tezy jest istotne. Dla przesuniecia jednostronnego (przykład 3.) mamy bowiem $\sigma(S) = \bar{\mathbb{D}}$ (=domknięte koło jednostkowe), podczas, gdy $\sigma_{ap}(S) = \partial\mathbb{D}$. Tu widmo punktowe S^* zawiera całe koło $\mathbb{D}$.