

1 Wykład nr 1

Przestrzeń wektorowa topologiczna, X nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) to przestrzeń wektorowa z topologią w której działania są ciągłe czyli:

$$\left. \begin{array}{l} m : \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, v) \longrightarrow \alpha v \in X \\ s : X \times X \ni (u, w) \longrightarrow u + w \in X \end{array} \right\} \text{ są ciągłe w topologii produktowej}$$

Przykład: $\mathbb{R}^n$ z topologią dyskretną nie jest PWT, bo gdy $v \neq 0$ to $(\frac{1}{n}, v) \longrightarrow (0, v)$ w $\mathbb{R} \times X$ $\frac{1}{n}v \neq 0$ więc $\frac{1}{n}v \not\rightarrow 0$ w topologii dyskretniej

Przykład: Przestrzeń unormowana jest PWT.

Np. $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest **normą** gdy:

- 1) $\|x\| > 0 \forall x \neq 0$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Metrykę określoną przez normę nazywamy funkcję $d(x, y) = \|x - y\|$
 $\|x - z\| = \|x - y + y - z\|$

Baza otoczeń punktu x_0 jest $\{B(x_0, r); r > 0\}$

Ciągłość s: Wystarczy dla $r > 0, x_0 = u_0 + w_0$ znaleźć otoczenie W pary (u_0, w_0) takie by $s(w) \subset B(x_0, r)$

$W = B(u_0, r_1) \times B(w_0, r_2)$ czyli chodzi o to, by z nierówności

$$\begin{cases} \|x - u_0\| < r_1 \\ \|y - w_0\| < r_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \|x + y - \overbrace{u_0 + w_0}^{x_0}\| < r \\ & \leq \\ & \|x - u_0\| + \|y - w_0\| < r \\ & r_1 = \frac{1}{2}r \text{ "dobre"} \end{aligned}$$

Odwzorowanie $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ jednorodne i subaddytywne czyli spełniające warunki 2) i 3) nazywamy **seminormą (półnormą)**. Wówczas $d(x, y) = \|x - y\|$ jest "pseudometryką"-semimetryką

Gdy $\|\cdot\|$ jest seminormą, to $\ker(\|\cdot\|) := \{x \in X : \|x\| = 0\}$ jest podprzestrzenią wektorową w X .

Na przestrzeni ilorazowej względem relacji równoważności:

$$x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \text{ czyli } X_{/\ker\|\cdot\|} (= X_{/\sim}) = \{[x] : x \in X\}$$

wzór $\|[x]\| = \|x\|$ określa normę:

$$[x] + [y] := [x + y]$$

$$\alpha[x] := [\alpha x]$$

(ćw: seminorma $\|\cdot\|$ określa PWT, ta topologia jest Hausdorffa (T_2) $\Leftrightarrow$ gdy $\|\cdot\|$ jest normą)

Dla zbiorów $A, B \subset X$ ich **sumę Minkowskiego** definiujemy jako:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$x \in X \text{ to } x + A = \{x + a : a \in A\}$$

Własności PWT:

- 1) Odwzorowanie translacji $\tau_X : X \ni v \rightarrow v - x \in X$ oraz "podobieństwa" $M_\alpha : X \ni v \rightarrow \alpha v \in X$
- 2) Suma i kombinacja liniowa odwzorowań ciągłych są ciągłe (np $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, g, f \in C(\omega, X)) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in X$ jest **ciągłe**)

Przykład seminormy w R^2 , która nie jest normą: $\|(x, y)\| := |x|$

$\|(0, y)\| := \ker \|\cdot\|$ Odwzorowanie $T : R^2 \ni (x, y) \rightarrow \alpha x + \beta y \in R$ jest ciągłe jedynie ($\Leftrightarrow$) gdy $B = 0$

(ćw. $\ker \|\cdot\| = \text{domknięcie zbioru } \{0\}$)

DEF. Odwzorowanie $T : X_1 \rightarrow X_2$ **izomorfizm** PWT X_1 oraz X_2 gdy

- 1) T jest homeomorfizmem
- 2) T jest liniowe

DEF. Zbiór $W \subset T$ jest

- $\rightarrow$ **wypukły** gdy $\forall \alpha, \beta \geq 0 (\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha W + \beta W \subset W, \forall x, y \in W \alpha x + \beta y \in W)$
- $\rightarrow$ **zbalansowany** gdy $\alpha \in \mathbb{K} |\alpha| \leq 1, \alpha W \subset W$
- $\rightarrow$ **absolutnie wypukły**, gdy jest wypukły i zbalansowany ($\Leftrightarrow \forall \alpha W + \beta W \subset W, |\alpha| + |\beta| \leq 1$)
- $\rightarrow$ **pochłaniający** gdy $\forall x \in X \exists \alpha > 0 \forall \beta > \alpha x \in \beta W$ (dla zbiorów wypukłych W jest pochłaniający $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists n > 0 x \in nW$)

(ćw. Każde otoczenie zera jest pochłaniające)

Gdy zbiór W jest pochłaniający, **funkcjonał Minkowskiego** zbioru W definiujemy wzorem

$$P_W(x) := \inf \{t > 0 : x \in tW\}$$

Lemat: gdy W jest pochłaniający i absolutnie wypukły to P_w jest seminormą.

Twierdzenie Minkowskiego

Zbiór $W \subset X$ w przestrzeni wektorowej X jest "z dokładnością do brzegu" kulą o środku 0 dla pewnej seminormy $\|\cdot\| \Leftrightarrow W$ jest absolutnie wypukły, pochłaniający tzn. $\{x : \|x\| < 1\} \subset W \subset \{x : \|x\| \leq 1\}$

Lemat: W każdej PWT istnieje baza złożona ze zbalansowanych otoczeń zera

Dowód: Niech v będzie otoczeniem zera. Niech $\mathbb{D} = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq 1\}$

Z ciągłości mnożenia $\mathbb{K} \times X \ni (\alpha, v) \rightarrow \alpha v \in X$ w punkcie $(0, 0)$

$\Rightarrow \exists s$ -otoczenie 0 w $\mathbb{K}$, $\exists U$ -otoczenie 0 w X takich że postaci $\{\alpha : |\alpha| < \delta\} = \Delta \forall \alpha \in \Delta, x \in U \alpha x \in U$

$W := \Delta \cdot U$ - jest otoczeniem zbalansowanym 0

$W \subset V, \alpha \in \Delta, |\beta| < 1 \Rightarrow \alpha\beta \in \Delta \Rightarrow \beta(\alpha U) \subset \Delta \cdot U$

□

TW.

I Skończenie (m-wymiarowe) PWT Hausdorffa są izomorficzne z przestrzenią euklidesową $\mathbb{K}^n$

II Na takich PWT każde odwzorowanie liniowe jest ciągłe

2 Wykład nr 2

Lemat: Jeżeli $T : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem liniowym między PWT X, Y to T jest ciągłe $\iff T$ jest ciągłe w pewnym punkcie $x_0 \in X$

$$\tau_2 : x \rightarrow x - z$$

T addytywne, więc z ciągłości T w punkcie x_0 wynika ciągłość $T \circ \tau_2$ w x_0 oraz ciągłość T w punkcie $x_0 - z$ (dowolny punkt X)

$$x_k \rightarrow x_0 \implies T(x_k) \rightarrow T(x_0)$$

$$z_0 : z_k \rightarrow z - 0$$

$$z_k - z_0 + x_0 \rightarrow x_0$$

z ciągłości w x_0

$$T(z_k - z_0 + x_0) \rightarrow T \cdot x_0$$

$$T(z_k) \rightarrow T \cdot z_0$$

(Ponadto gdy Y jest unormowana, to T ciągłe $\iff$ w $\exists U$ otoczenie 0 w X takich, że:

$$T(U) \subset \{y : \|y\| < 1 \iff T \text{ jest ograniczone na pewnym otoczeniu } 0\})$$

Przykład funkcjonału liniowego nieciągłego

$$1) \text{ na } l_0^2 = \{(\alpha_n)_{n=1}^\infty, \exists x \forall n \geq k \alpha_n = 0\}$$

$$2) \text{ na } l_0^2 = \{(\alpha_n)_{n=1}^\infty, \sqrt{\sum (\alpha_n)^2} < \infty\}$$

$$\varphi(\alpha_n) = \sum n \cdot \alpha_n$$

$$\epsilon_k^\rightarrow = \text{ciąg}(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{c_k}, 0, \dots)$$

$$\varphi(\sum_k) = k \text{ (nieciągły w } 0 \text{ bo } \frac{1}{\sqrt{k}} \epsilon_k \rightarrow 0, \text{ zaś } \varphi \text{ od tego ciągu} = \text{ciąg } \sqrt{k} \rightarrow +\infty)$$

Każdy ciąg liniowo niezależny można rozszerzyć do bazy.

W l^2 ciąg liniowo niezależny ϵ_x można rozszerzyć do bazy i niech np. ϵ_* = jakiś wektor z tej bazy różny od wszystkich ϵ_k , $(\epsilon_t)_{t \in T}$, $t_* \in T \setminus N$

$$\varphi_*(\sum c_t \cdot \epsilon_t) := c_{t_*}$$

$$\varphi_*(\epsilon_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

TW.

I Skończenie (m-wymiarowe) PWT Hausdorffa są izomorficzne z przestrzenią euklidesową $\mathbb{K}^n$

II Na takich PWT każde odwzorowanie liniowe jest ciągłe

Dowód

□

Wniosek Podprzestrzenie liniowe skończenie wymiarowe w PWT Hausdorffa są domknięte.

Dowód

□

Uwaga Wnętrze każde podprzestrzeni liniowej właściwej jest puste ($\Rightarrow$ w przestrzeniach Banacha wymiar algebraiczny jest $> \aleph_0$)

Dowód Uwagi $\rightarrow$ ćwiczenia

Funkcjonał Minkowskiego zbioru $E \subset X$ $p_E(x) := \inf \{ \underbrace{t > 0 : x \in tE}_{X \setminus \emptyset \forall x \in X (E \text{ pochłaniający})} \}$

1) p_E jest subaddytywny oraz $p_E(\alpha x) = \alpha p_E(x) \forall \alpha > 0$

2) Gdy E absolutnie wypukły to $p_E(\alpha x) = |\alpha| p_E(x) \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha > 0 \quad \alpha x \in \alpha tE \iff x \in tE$$

$$\{s : \alpha x \in sE\} = \alpha \cdot \{t : x \in tE\} = \{\alpha t; x \in tE\}$$

$$\inf \alpha A = \alpha \inf A \quad \forall \alpha > 0$$

$$tE + sE \subset (t+s)E \text{ dla } E \text{ wypukłych}$$

$$\frac{t}{t+s}E + \frac{s}{t+s}E \subset E$$

$$\forall a, b \in E \quad \frac{t}{t+s}a + \frac{s}{t+s}b \in E \quad (= \text{wypukłość})$$

$$\{r : (x+y) \in rE\} \subset \underbrace{\{s : x \in sE\}}_{x=sa} + \underbrace{\{t : y \in tE\}}_{y=tb} \quad \setminus \setminus \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

$$\{x : p_E(x) < 1\} \subset E \{x : p_E(x) \leq 1\}$$

$$x \in E \Rightarrow 1 \in \{t : x \in tE\} \leq 1$$

Niech $p_E(x) < 1$

$$\exists_{0 < s < 1} : z \in sE$$

$$z = \frac{1}{s}z + (1-s) \cdot 0 \text{ - kombinacja wypukła}$$

$0 \in E$, bo E pochłaniający

3 Wykład nr 3

$$\{p_E < 1\} \subset E \subset \{p_E \leq 1\} p_E(x) = \inf\{t : x \in tE\}$$

$$p_E(x) < 1 \Rightarrow \exists_{s < 1} x \in s \cdot E, x = s \cdot s$$

$$x = se + (1 - s) \cdot 0$$

$$x \in E \Rightarrow 1 \in \{t : x \in tE\}$$

$$E - \text{absolutnie wypukły } (|\alpha| + |\beta| \leq 1 \Rightarrow \alpha e + \beta f \in E) \forall e, f \in E$$

$$\alpha E + \beta E = (|\alpha| + |\beta|)E \text{ c.w}$$

$$\alpha x \in tE \Leftrightarrow |\alpha|x \in tE$$

$$x \in \frac{t}{|\alpha|}E$$

$$x \in sE \Leftrightarrow \alpha x \in |\alpha|sE$$

$$p_E \alpha x = |\alpha| p_E(x)$$

Twierdzenie

Funkcjał liniowy $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ (na PWT X) jest: (NWSR)

1. ciągły ($\Leftrightarrow$)
2. $\text{Ker}(\varphi) := \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ jest zbiorem domkniętym ($\Leftrightarrow$)
3. $\exists U$ -otwarty $\neq \emptyset; \varphi(U) \neq \mathbb{K}$

Przestrzenie unormowane i operatory liniowe

Twierdzenie Gdy X, Y -unormowane $T : X \rightarrow Y$ liniowe to NWSR:

1. T jest ciągły
2. T jest ograniczony na (pewnej) kuli
3. $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$
4. $\exists M : \forall_{x \in X} \|Tx\| \leq M\|x\|$ (= wniosek Lipschnitza ($x=w-u$))

Przykład $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow Y \quad y_k := T(\epsilon_k)$$

$$\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

.

$$\epsilon_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{(k)}, \dots, 0)$$

to:

$$T(\sum x_j \epsilon_j) = \sum x_j y_j$$

$$\|Tx\| \leq \sum |x_j| \|y_j\| \leq^{(CBS)} \|x\| \cdot \underbrace{\|(\beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_2)\|}_{=M}$$

$$\forall_{\alpha=\|x\|} \frac{1}{\alpha} x \in \text{domku kuli jednostkowej}$$

Czy norma jest ciągła z warunkiem Lipschnitza?

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \text{ (2-ga nierówność trójkąta)}$$

Definicja

$\mathcal{B}(X, Y) = \{T : T \text{ jest operatorem liniowym ciaglym z } X \text{ do } Y\}$

Jest to przestrzeń unormowana. Ponadto $\|T \cdot S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$, $\|T(S(x))\| \leq \|T\| \|Sx\| \leq \|T\| \|S\| \|x\|$

Np. $\|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\| \Rightarrow \|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$

Definicja

Przestrzeń Banacha = p. unormowana zupełna

Przykład: $C[a, b]$ z normą $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ jest zupełna $\forall t_0 |f_n(t_0)| \leq \|f_n - f_m\|$ (ćw)

$C^1[a, b] = \{f \in C[a, b] : \exists f' \in C[a, b]\}$ są podprzestrzeniami gęstymi $C^1[a, b]$ nie jest zupełna z normą "supremową" ale jest zupełna z normą $\|f\|_{C^1[a, b]} = |f(a)| + \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ (równoważną z normą $\sup_{[a, b]} |f| + \sup_{[a, b]} |f'|$)

Definicja

Normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ na X są równoważne $\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0 \forall x C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$

Twierdzenie

Gdy X, Y unormowane $X \neq \{0\}$, to $\mathcal{B}(X, Y)$ jest zupełna $\Leftrightarrow Y$ jest zupełna

Dowód

($\Leftarrow$)

Niech $(T_n \subset \mathcal{B}(X, Y))$ będzie ciągiem Cauchy'ego.

Dla dowolnie ustalonego $x_0 \in X$ mamy

$$\|T_n x_0 - T_m x_0\| = \|(T_n - T_m)x_0\| \leq \|T_n - T_m\| \|x_0\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

($\Rightarrow$)

$T_n x_0$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y_0

Y - zupełna $\Rightarrow \exists T_0(x_0) := \lim T_n x_0$

$$x_0 = x_1 + x_2$$

$$T_n : x_1 \rightarrow T_n x_1$$

$$T_n : x_2 \rightarrow T_n x_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_n(x_1 + x_2)}_{\rightarrow T_0(x_1 + x_2)} \rightarrow T_0 x_1 + T_0 x_2 \quad \text{addytywność } T_0$$

Wykażemy, że T_0 jest ograniczony $\|T_n - T_0\| \rightarrow 0$

Ustalmy $\epsilon > 0$, $\exists K \forall n, m \geq K \|T_n - T_m\| < \epsilon$

Dla $\|x\| \leq 1$ $\|T_n x - T_m x\| < \epsilon \cdot \|x\| \leq \epsilon$

$m \rightarrow \infty$ z ciągłości normy

$$\|T_n x - T_0 x\| \leq \epsilon$$

$\Rightarrow$ (po przejściu do kresu ($\sup_{\|x\| \leq 1}$))

mamy $\|T_n - T_0\| \leq \epsilon \forall n \geq K$

$$M = \sup \|T_n\|$$

$$\|T_n x\| \leq M \|x\| \rightarrow \|T_0 x\| \leq M \|x\|$$

□

Gdy $T = \mathbb{K}$ to $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ oznaczamy jako X' (przestrzeń dualna do X)
 $\mathcal{B}(X', \mathbb{K}) = {}^{ozn} X''$ (druga dualna do X)

Zanurzenie kanoniczne:

$$j : X \ni x \rightarrow x^{**} \in X$$

$$\text{Dla } \varphi \in X' \quad x^{**}(\varphi) := \varphi(x)$$

$$\|x^{**}\| = \sup |\varphi(x)| \leq *$$

$$\|\varphi\| \leq 1 \quad \varphi \in X' \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

$$* \leq \|x\|$$

Uwaga

Zachodzi "Dualny wzór na normę"

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\| < 1} |\varphi(x)|, \quad j \text{ jest izometrią}$$

(x_n) ciąg w X

$$\sum x_n = x_0 \text{ oznacza, że } \exists x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k x_n$$

$$\text{tzn. } \|S_k - x_0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Definicja

Szereg $\sum x_n$ **bezwzględnie zbieżny** gdy $\sum \|x_n\| < \infty$

Szereg ten jest **warunkowo zbieżny** gdy $\forall \pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekcja $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ jest zbieżny.

Twierdzenie Przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest zupełna $\Leftrightarrow$ każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny $\Leftrightarrow$ Gdy $\forall (x_n) \quad \|x_n\| \leq c_n \Rightarrow \sum x_n$ zbieżny

4 Wykład nr 4

Twierdzenie (Kryterium “Szeregowo” zupełności $(X, |||)$)

Mamy ustalony ciąg liczb $c_n = 0$ takie, że $\sum c_n < \infty$

Wówczas:

- 1) $X, |||$ jest zupełna
- 2) Szeregi bezwzględnie zbieżne o wyrazach z X są zbieżne
- 3) $x_n \in X, ||x_n|| \leq C$, to $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny
- 4) Gdy $z_n \in X : ||z_n - z_{n+1}|| \leq c_n$ to $\exists \lim z_n \in X$

Dowód

1) $\Rightarrow$ 2) Ustalamy x takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$

$S_k := \sum_{n=1}^k x_n$, to mamy wykazać, że $\exists \lim S_n (= \text{def } \sum_{n=1}^{\infty} x_n)$

$m > k$, to $||S_m - S_k|| = ||\sum_{n=k+1}^m x_n|| \leq \sum_{n=k+1}^m ||x_n|| \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} 0$

czyli ciąg sum częściowych spełnia warunek Cauchy’ego $\Rightarrow$ teza

$x_n = z_{n+1} - z_n \sum_{n=0}^k x_n = z_{k+1}, ||x_n|| \leq c_n \Rightarrow \sum x_n$ - zbieżny czyli $\exists \lim z_k$

(4) $\Rightarrow$ (1) Ustalmy dowolny ciąg Cauchy’ego y_n w X Uwaga: gdy pewien podciąg y_{n_k} jest zbieżny (do granicy g) to: $y_n \rightarrow y$.

$\epsilon \exists M_1 \forall n, m > M_1 ||y_n - y_m|| < \frac{\epsilon}{2}$

$\exists M_2 \forall k > M_2 ||y_{n_k} - g|| < \frac{\epsilon}{2}$

(y_n) jest Cauchy’ego $\iff \text{diam}\{y_n : n \geq k\} \rightarrow 0$

$\text{diam} A_{n_1} < C_1$

$\text{diam} A_{n_2} < C_2, (\exists n_2 > n_1)$

$k \geq l$, to $y_{n_k}, y_{n_l} \in A_{n_l}$

$n_k \geq n_l ||y_{n_k} - y_{n_l}|| \leq c_l \xRightarrow{\text{dzięki (4) dla } z_k := y_{n_k}} \exists \lim y_{n_k}$

Przykład szeregu zbieżnego bezwarunkowo, lecz nie bezwzględnie

$X = l_{\infty} = \{(d_n)_{n=1}^{\infty} : \sup |\alpha_n| < \infty\}$

$e_k = \text{ciąg}(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{(k)}, 0, \dots)$

$S := \text{ciąg } \frac{1}{n}$

$S - S_k = \text{ciąg}(0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots), ||S - S_k|| = \frac{1}{k+1}$

Ustalamy $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekcja

Wykażemy, że $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$

Jeżeli wśród liczb od $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ są wszystkie początkowe liczby $1, \dots, m$

$(k \geq \max\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(m)\})$ to $S - S_k^{(\sigma)} = \text{ciąg}(0, \dots, \underbrace{0}_{(m)}, \{\frac{1}{m+1} \text{ lub } 0, \dots\})$

$||S - S_k^{(\sigma)}|| \leq \frac{1}{m+1}$

□

Twierdzenie

Gdy $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ - liniowo ciągły, to dla szeregu zbieżnego $(S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n)$ w X , szereg $\sum T x_n$ też jest zbieżny do sumy $T(S)$

Zbieżność bezwzględna (odp. bezwarunkowa $\sum x_n$) implikuje analogiczną zbieżność $\sum T x_n$

$$T(\sum_1^{\infty} x_n) \stackrel{\text{z ciągłości } T}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} T(\sum_1^k x_n) = \lim \sum_1^k T x_n = \sum_1^{\infty} T x_n$$

$$\|T x_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$$

Przykład 1

$$X = C([0, 1]), \|f\| = \sup_{[0, 1]} |f|$$

$$Y = \mathbb{R} \quad T f := \int_0^1 f(t) dt, \|T\| = 1$$

więc gdy $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny to $\int_0^1 (\sum f_n(t)) dt = \sum \int_0^1 f_n(t) dt$

Przykład 2

$$T f = f'$$

$$X = C^1[a, b], Y = C[a, b] \text{ z normy } \sup |f'| + |f(a)|$$

Twierdzenie (Banacha o przedłużaniu ze zbiorów gęstych)

Gdy $D \subset X$ jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, zaś Y przestrzenią Banacha, każdy operator liniowy i ciągły $T : D \rightarrow Y$ ma dokładnie jedno przedłużenie $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ (tzn. $\tilde{T}|_D = T$)

Dowód

$f, g \in C(X, Y)$ to $\{x : f(x) = g(x)\}$ jest zbiorem domkniętym (z topologii i gdy $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$ na X) (dowód $(\Rightarrow)$ jednoznaczności przedłużenia))

Dowód istnienia ciągu Cauchy'ego

(Konstrukcja) Dla $z \in X \exists_{x_n \in D} z = \lim x_n$

Istnieje **ważność** $\lim T x_n$

$$\|T x_n - T \hat{x}_m\| = \|T(x_n - \hat{x}_m)\| \leq \|T\| \overbrace{\|x_n - \hat{x}_m\|}^{\|z - z\| = 0 \text{ przy } n, m \rightarrow \infty} \Rightarrow \text{jest to ciąg Cauchy'ego}$$

gdy $\hat{x}_n \rightarrow z$, to $\lim T \hat{x}_n = ? \lim T x_n$

$\hat{T}$ jest liniowy $\hat{T}(\lim x_n + \lim w_n) = \lim T x_n + \lim T w_n$

$$x_n \rightarrow z \text{ to } \|\hat{T}_z\| = \lim \|T x_n\| \leq \|T\| \lim \|x_n\| = \|z\|$$

□

Lemat Gdy $S \in \mathcal{B}(X) (= \mathcal{B}(X, X))$, to operatory lewostronnego i prawostronnego mnożenia przez S :

$$L_S : \mathcal{B}(X) \ni T \rightarrow S \cdot T (= {}^{ozn} ST)$$

$$R_S : \mathcal{B}(X) \ni T \rightarrow T \cdot S$$

są liniowo ciągłe

Dowód

liniowość - OK

$$\text{ciągłość: } \|L_S(T)\| = \|S \cdot T\| \leq \|S\| \|T\|$$

□

Twierdzenie (Carl Neumann) o szeregu Neumanna

Gdy X jest przestrzenią Banacha, to gdy $T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T - I\| < 1$, to $\exists T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$

Dowód

Niech $A := I + \sum_{n=1}^{\infty} (I - T)^n$. Jest to szereg bezwzględnie zbieżny, bo $\|(I - T)^n\| \leq \|(I - T)\|^n$, zupełność X gwarantuje zupełność $\mathcal{B}(X) \Rightarrow$ zbieżność szeregu

$$\underbrace{(I - T)A}_{A - TA} = I - T + L_T(\sum_{n=1}^{\infty} (I - T)^n) = I - T + \sum_{n=1}^{\infty} (I - T)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (I - T)^n = A - I$$

$$A - TA = A - I$$

$TA = T$ Podobnie $AT = I$ (korzystamy z lematu dla R_T)

□

5 Wykład nr 5

$$\hat{L}^p(\mu) = \{f - \text{mierzalna}, \underbrace{\int |f|^p dp}_{(\|f\|_p)^p} < \infty\}, \mu\text{-zupełna}$$

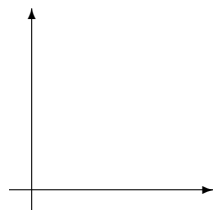
$$L^p(\mu) = \hat{L}^p / \ker \|\cdot\|_p, \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ p.w. } (1 \leq p < \infty)$$

$$[f] = \{g : g = f \text{ p.w. } [\mu]\} \text{ (wówczas } \|f\|_p = \|\rho\|_p =^{def} \|[f]\|_A)$$

Definicja

Jeśli $p, q > 0$ są wykładnikami sprzężonymi (lub liczbami harmonicznymi sprzężonymi), gdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff pq = p + q$

$$(1-p)(1-q) = 1 - (p+q) + pq = 1$$



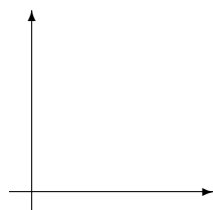
$$\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$$

$$\int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

Jeśli $a, b > 0$

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ dla } a^{p-1} \neq b$$

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ dla } a^{p-1} = b$$



(=Nierówność Younga)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Twierdzenie

Dla $f \in \hat{L}^p(\mu), g \in \hat{L}^q(\mu)$

$$|\int f g d\mu| \leq \|f\|_p \|g\|_q \text{ (Nierówność Höldera)}$$

Dowód

Gdy $\|f\|_p = 0$ lub $\|g\|_q = 0$, to któraś z tych funkcji $\equiv 0$ p.w. $[\mu] \iff$ lewa strona = 0

Założenia: $\|f\|_p \neq 0, \|g\|_q \neq 0$

Dowód przy założeniu $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$ - stąd wynika, że $|\int \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} f g d\mu| \leq 1$ (dla $\frac{f}{\|f\|_p}$ spełnia

$$\left\| \frac{1}{\|f\|_p} \right\| = 1 \text{ z jednorodności } \|\cdot\|_p)$$

$$|f(w)g(w)| \leq \frac{\|f(w)\|^p}{p} + \frac{\|g(w)\|^q}{q}$$

$$\text{Całkując stronami } \int |f g| d\mu \leq \frac{\|f(w)\|_p^p}{p} + \frac{\|g(w)\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Wniosek

$$\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in l^p, \beta \in l^q, \text{ to } \sum |\alpha_n \beta_n| \leq \|\alpha\|_p \|\beta\|_q = (\sum |\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |\beta_n|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Nierówność Minkowskiego

Dla $1 < p < \infty$; $\varphi, \psi \in L^p(\mu)$ $\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$

Dowód

Niech $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$$\|\varphi + \psi\|_p^p = \int |\varphi + \psi|^p d\mu = \int |\varphi + \psi| |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq \int |\varphi| |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu + \int |\psi| |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq \|\varphi\|_p \|\varphi + \psi\|_p^{\frac{p}{q}} + \|\psi\|_p \|\varphi + \psi\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Sprawdzamy, że $|\varphi + \psi|^{p-1} \in L^q$:

$$|\varphi + \psi|^{p-1} = |\varphi + \psi|^{\overbrace{p-1}^{p+q-q}} = |\varphi + \psi|^p$$

Z nierówności Höldera $\int |\varphi| |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq \|\varphi\|_p \cdot \|(\varphi + \psi)^{p-1}\|_q = \|\varphi\|_p (\int |\varphi + \psi|^p d\mu)^{\frac{1}{q}} = \|\varphi\|_p \|\varphi + \psi\|_p^{\frac{p}{q}}$

$$\|\varphi + \psi\|_p^p \leq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p) \|\varphi + \psi\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\|\varphi + \psi\|_p^{\frac{p}{q}} \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$$

$$\|\varphi + \psi\|_p, \text{ to } p - \frac{p}{q} = \frac{pq-p}{q} = \frac{p+q-p}{q} = 1$$

□

Lemat

dla $f \in L^p(\mu)$, $\alpha > 0$

$$\mu\{w \in \Omega : |f(w)| > \alpha\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p}$$

$$\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu > \int_A |f|^p d\mu \geq \alpha^p \mu(A)$$

Wniosek:

gdy $f_n \rightarrow f$ w L^p , czyli $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ to

$f_n \xrightarrow{(\mu)} f$ czyli $\forall \epsilon > 0 \mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \rightarrow 0$

Twierdzenie Riesz

I Przestrzeń $L^p(\mu)$ jest zupełna

II Każdy ciąg zbieżny w $\|\cdot\|_p$ zawiera podciąg zbieżny p.w. $[\mu]$

Dowód

ad 1) Stosujemy kryterium “szeregowo zupełności” dla $c_n = 3^{-n}$

Założenia: $\|f_n\|_p \leq 3^{-n}$

Teza: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny w $L^p(\mu)$, tzn. $\exists s \in L^p(\mu) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k f_n - s \right\|_p \rightarrow 0$

(dygresja: $x_n = z_{n+1} - z_n$ to $\sum x_n = (\lim z_n) - z$)

Niech $B_n = \{w \in \Omega : |f_n(w)| \geq 2^{-n}\}$

z lematu:

$$\Rightarrow \mu(B_n) \leq \frac{\|f_n\|_p^p}{(2^{-n})^p} \leq ((\frac{2}{3})^p)^n \Rightarrow \sum \mu(B_n) < \infty$$

z lematu Borela-Cantellego $\mu(\limsup B_n) = 0$

$B = \bigcap_k \bigcap_{n \geq k} B_n$, $x \in$ do nieskończenie wielu B .

Dla $w \in \Omega \setminus B$, czyli dla p.w. $w \in \Omega$ mamy $x \in \Omega \setminus B_n$ od pewnego miejsca począwszy ($\forall n \geq K_w$) $|f_n(w)| < 2^{-n} \Rightarrow \exists S(w) := \sum f_n(w)$ (zbieżność p.w.)

$$\begin{aligned}
\forall_k \left\| \sum_I^k f_n - S \right\|_p^p &= \int \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_I^k f_n - \sum_1^\infty f_n \right|^p d\mu \leq \liminf \int \left| \sum_I^y f_n - \sum_I^k f_n \right|^p d\mu = \\
&= \liminf_j \int \left| \sum_{k+1}^j f_n \right|^p d\mu = \liminf_j \left\| \sum_{k+1}^j f_n \right\|_p^p \\
\left\| S - \sum_1^k f_n \right\|_p &\leq \lim_j \left\| \sum_{k+1}^j f_n \right\|_p \leq \lim_j \sum_{k+1}^j \|f_n\|_p \leq \sum_{k+1}^\infty 3^{-n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

ad 2) $\|z_{n_{k+1}} + z_{n_k}\|_p \leq 3^{-k}$

6 Wykład nr 6

Zadanie

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ - przestrzeń z miarą

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mierzalna to rozważamy jej funkcję "rozkładu"

$g(f) := \mu\{w \in \Omega : f(w) > f\}$

Wykazać, że $\int |h|^p d\mu < \infty$

Całka Stieltjesa: $\int h dg =$ granica sum postaci:

$$\sum_I^n h(\xi_j)[g(t_j) - g(t_{j-1})], \quad \xi \in [t_{j-1}, t_j] g \in C^1, \quad \text{to} \quad \int_a^b h dg = \int_a^b h(t)g'(t)dt$$

Twierdzenie

Założenia:

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \forall_{\substack{\lambda \in K \\ |\lambda| > 1}} \quad p : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$$

Wówczas:

$$|\varphi| \leq p \Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi \leq p \quad \text{tzn} \quad \forall_{x \in X} [\varphi(x) \leq p(x)] \Leftrightarrow [\forall_{x \in X} \operatorname{Re} \varphi(x) \leq p(x)]$$

Dowód

$$\Rightarrow \quad \text{bo} \quad \operatorname{Re} z \leq |z|$$

$$\Leftarrow \quad \exists \lambda : |\lambda| = 1 \quad |\varphi(x)| = \lambda \cdot \varphi(x) = \varphi(\lambda x) = \operatorname{Re} \varphi(\lambda x) \leq p(\lambda x) = p(x)$$

□

Wnioski:

- 1) Dla φ - jak wyżej $M \subset X$ - podprzestrzeni liniowej gdy $\operatorname{Re} \varphi|_M \leq 0$, to $M \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, czyli $\varphi|_M = 0$
- 2) Odwzorowanie:

$$(B)(X, \mathbb{C}) = X' \ni \varphi \longrightarrow \operatorname{Re} \varphi \in \mathcal{B}_R(X, \mathbb{R}) = X'_R \text{ jest izometrią } (\chi F)(x) = \frac{F(x) - iF(ix)}{2} \quad \chi(\operatorname{Re} \varphi) = \varphi$$

Definicja

Przestrzeń unitarna to przestrzeń wektorowa H z iloczynem skalarnym czyli odwzorowaniem $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, które jest liniowe względem pierwszej zmiennej skośnie symetryczne ($\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$) $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$ i dodatnio określona $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall_{x \in H \setminus \{0\}}$

Wektory $u, w \in H$ są prostopadłe w $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gdy $\langle u, w \rangle = 0$ [ozn $u \perp w$]

Normą przestrzeni unitarnej nazywamy odwzorowanie:

$$\|\cdot\| : H \ni x \rightarrow \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \langle x, \alpha x \rangle = \underbrace{\alpha \bar{\alpha}}_{|\alpha|^2} \langle x, x \rangle$$

$\Rightarrow$ jednorodność

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}_{\sqrt{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}}$$

Wniosek: Tw Pitagorasa: $x \perp y \rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Przykład 1 iloczynu skalarnego

W $\mathbb{C}^n$ mamy “standarowy iloczyn skalarny”: $(z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n))$

$$\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

Przykład 2 iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle := \int f(t) \overline{g(t)} dt$$

$$\text{w } l^2 \quad \langle (\alpha_i, (\beta_j)) \rangle = \sum_{j=1}^{\text{inf } t_y} \alpha_j \bar{\beta}_j$$

W R^2 weźmy bazę $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. $\vec{f}_1 = (1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, 1)$

$s \in \mathbb{R}^2 \ni y$, to niech $x = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2$ $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$

Dlaczego prostopadłe? Bo po podstawieniu $x = 0 + 0 = 0$ i $\langle x, y \rangle := 0 + 0 = 0$

Z twierdzenia kosinusów:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos \angle(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad \text{to definiuje kąt}$$

Nierówność Cauchy’ego-Buniakowskiego-Schwarza (CBS)

$$\forall_{x, y \in H} \|\langle x, x \rangle\| \leq \|x\| \|y\|$$

Dowód

Ustalmy $x, y \in H \forall_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 \geq 0$ stałe

$\Rightarrow$ wyróżnik tego trójmianu (zmiennej $t \in \mathbb{B}$) jest ≥ 0

$$4(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos \angle(x, y)$$

□

Definicja

Przestrzeń Hilberta to przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Przykład

$L^2(\mu)$ jest p. Hilberta z iloczynem $\langle f, y \rangle = \int f \bar{g} d\mu$

$p =, g = 2$ są kanonicznie sprzężone więc z nierówności Holdena:

$$\underbrace{\left| \int f \bar{g} d\mu \right|}_{|\langle f, g \rangle|} \leq \underbrace{\int |f \bar{g}| d\mu}_{\|f\| \|g\|} \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \bar{g}^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + //dodajemy stronami$$

$$\Leftrightarrow (\text{Reguła równoległoboku: } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$$

Wzór polaryzacyjny:

$$\frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2)$$

Rzut prostopadły punktu x na zbiór domknięty, wypukły M , to taki punkt x_0 zbioru M dla którego $x - x_0 = \inf_{m \in M} \|x - m\|$

Oznaczenia $x_0 = P_M x$

$\|x - a - (y - a)\| = \|x - y\|$ (przesunięcia są izometriami przestrzeni unormowanych)

Uwaga: Gdy $x = 0$, to $P_M 0$ jest “najkrótszym wektorem w zbiorze M ”

$$\|P_M 0\| = \inf_{m \in M} \|m\| = \delta$$

W ogólnym przypadku dzięki izometrii $\Rightarrow P_M x = x + P_{M-x} 0$

Uwaga: $P_M(P_M x) = P_M x$ ($P_m \circ P_M = P_m$) (własność przesuwalności rzutów)

Twierdzenie

W przestrzeni Hilberta każdy punkt ma dokładnie jeden rzut na dany zbiór domknięty, niepusty i wypukły M .

Dowód:

Dzięki przesuwalności rzutów, wystarczy dowieść istnienia i jednoznaczności rzutu punktu $x = 0$, czyli tego, że:

$$\forall! z_0 \in M \|z_0\| = \inf_{m \in M} \|m\| = \delta \quad (\text{jest najmniejsze})$$

Wyberzmy ciąg (z_n) w zbiorze M taki, że $\|z_n\| \rightarrow \delta$

Uwaga: wypukły $\Rightarrow \forall u, w \in M \frac{1}{2}(u + w) \in M$ więc $\|u + w\|^2 \geq 4\delta^2$

Chcemy sprawdzić warunek Cauchy’ego:

$$0 \leq \|z_n - z_k\|^2 = 2(\|z_n\|^2 + \|z_k\|^2) - \|z_n + z_k\|^2 \leq \underbrace{2(\|z_n\|^2 + \|z_k\|^2)}_{\substack{n, k \rightarrow \infty \\ \rightarrow \delta^2}} - 4\delta^2$$

i to jest warunek Cauchy’ego

□

Wniosek

Z zupełności i z otrzymanego właśnie warunku Cauchy'ego to istnienie granicy $z_0 := \lim z_n$. Z ciągłości $\|\cdot\| \Rightarrow \|z_0\| = \lim \|z_n\| = \delta$

Gdyby $\|z_*\| = \delta, z_* = M \quad \|z - z_*\|^2 \leq 2(\|z_0\|^2 + \|z_*\|^2) - 4\delta^2 = 0 \Rightarrow z_0 = z_*$

Twierdzenie

$$z_0 = P_M z$$

$$\begin{cases} z_0 \in M \\ z - z_0 \perp m \end{cases} \quad \forall_{n \in M} \quad \text{gdy} \quad M = \lim M$$

7 Wykład nr 7

y_0 = rzut na zbiór (wypukły domknięty) M , gdy $y_0 = P_M x_0$ - rzut x_0 na M
 odległość $\|x_0 - y_0\|$ minimalizacja odległości $\|x_0 - m\|$, $m \in M$ i $y - 0 \in M$

Niech $z \in M \Rightarrow \forall_{t \in [0,1]}$

$$tz + (1-t)y_0 \in M$$

$\Rightarrow$ funkcja $\|x_0 - [tz + (1-t)y_0]\|^2$ osiąga wartość najmniejszą na $[0, 1]$ w punkcie $t = 0$

$$\Psi = \|x_0 - y_0 + t(y_0 - z)\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle x_0 - y_0, y_0 - z \rangle + t^2 \|y_0 - z\|^2$$

$$\Psi(0) = \min_{[0,1]} \Psi \Rightarrow \psi^1(0) \geq 0$$

Twierdzenie (wariancyjna charakterystyka rzutu)

Gdy $x_0 \in H$, $y_0 \in M$, M - domknięty i wypukły, to:

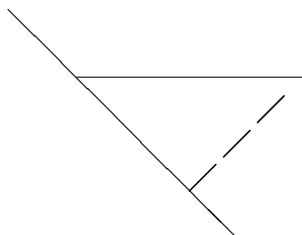
- 1) $y_0 = P_M x_0 \Leftrightarrow \forall_{z \in M} \operatorname{Re} \langle x_0 - y_0, y_0 - z \rangle \geq 0$
- 2) W przypadku, gdy M jest podprzestrzenią afiniczną domkniętą (tzn. $m - y_0$ jest podprzestrzenią liczbową), to

$$y_0 = P_M x \Leftrightarrow x_0 - y_0 \perp M - y_0, \text{ czyli}$$

$$x_0 - y_0 \perp m - y_0 \quad \forall_{m \in M}$$

- 3) Gdy M jest domkniętą podprzestrzenią liniową to

$$y_0 = P_M x_0 \Leftrightarrow y_0 \in M \text{ oraz } x_0 - y_0 \perp M$$



Dowód(1)

$(\Rightarrow)$ było (Ψ - osiąga minimum w punkcie $t = 0$)

$$(\Leftarrow) \quad \psi''(t) \equiv \text{const} \geq 0$$

$$2 \|y_0 - z\|^2$$

$(\Rightarrow) \quad \psi'$ rośnie, gdy $\psi'(0) \geq 0 \Rightarrow \psi'(t) \geq 0 \quad \forall_{t \in [0,1]}$

$$(\Rightarrow) \quad \psi \text{ rośnie} \Rightarrow \underbrace{\psi(0)}_{\|x_0 - y_0\|^2} \leq \psi(1) = \|x_0 - z\|^2$$

$$\|x_0 - y_0\|^2 \text{ tak jest } \forall_z \Rightarrow y_0 = P_M x_0$$

Wnioskiem jest twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym

Twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym

Gdy $M = \bar{M} = \lim(M) \subset H$, H - p. Hilberta

$$\forall x \in H \exists! (x_1, x_2) \in M \times M^\perp, \quad x = x_1 + x_2, \text{ tzn. } x_1 \in M, x_2 \perp M$$

Dowód

$x_1 := P_M x$ $x_2 := x - x_1 \perp M$ z punktu (3) ostatniego twierdzenia

Gdyby $x = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, to $\underbrace{x_1 - \bar{x}_1}_{\in M} = \underbrace{\bar{x}_2 - x_2}_{\in M^\perp} \Rightarrow x_1 - \bar{x}_1 \in M \cap M^\perp = \{0\}$

i to jest dowód jednoznaczności

Np gdy $M = \{f \in L^2[-1, 1] : f(t) = f(-t) \text{ p.w.}\}$ to $(P_M f)(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$ p.w. to $M^\perp$ = funkcja nieparzysta

Uwaga: Lindenstrauss i Tzafriri wykazali że:

gdy w przestrzeni Banacha X dla każdej podprzestrzeni liniowej domkniętej M istnieje jakaś podprzestrzeń liczbowa domknięta $N \subset X$

$$X = M + N, \quad M \cap N = \{0\}, \text{ to}$$

X jest izomorficzna z pewną podprzestrzenią Hilberta

Własności rzutu prostopadłego na domkniętą podprzestrzeń liniową M

Niech $P = P_M, P : H \rightarrow H$

- (1) P jest odwzorowaniem liniowym
- (2) $P \circ P$ (czyli P^2) = P
- (3) $\|P\| = 1$ gdy $M \neq \{0\}$ (i 0 gdy $M = \{0\}$)
- (4) "symetria" $\langle P_x, y \rangle = \langle x, P_y \rangle$
- (5) Gdy P i $H \rightarrow H$ spełnia (1), (2) i jeden z warunków (3) lub (4) to $\exists_M P = P_M, M = P(H) = \ker(I - P)$

DYGRESJA

$$x = \underbrace{x_1}_{\in M} + \underbrace{x_2}_{\in M}$$

$I - P : x \rightarrow (x - x_1) = x_2$ więc $I - P_M = P_{M^\perp}$

KONIEC DYGRESJI

Dowód(1)

$x_1 = P_x$ - rzut x

$$x = x_1 + x_2 \quad x_1, y_1 \in M$$

$$y = y_1 + y_2 \quad x_2, y_2 \perp M$$

$$(x + y) = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in M} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\perp M}$$

$$\text{Z jednoznaczności rozkładu} \Rightarrow \underbrace{x_1 + y_1}_{P(x+y)} = P(x + y)$$

Dowód(2)

$$(Px) = \underbrace{Px}_{\in M} + \underbrace{0}_{\perp M} \Rightarrow P(Px) = Px$$

Dowód(3)

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \|Px\|^2$$

$$\|Px\| \leq 1 \cdot \|x\| \quad \|P\| \leq 1$$

$$\exists_{m_0 \in M \setminus \{0\}}, \text{ to } Pm_0 = m_0 \Rightarrow \|P\| \geq 1$$

Dowód(4)

$$\text{Wykażemy, że } \langle P_{x,y} \rangle = \langle Px, Py \rangle = \langle x, Py \rangle$$

$$\Leftrightarrow \text{z addytywności } \langle Px, \cdot \rangle$$

$$\langle Px, y - Py \rangle = 0$$

Dowód 5

$$\text{Niech } M := P(H)$$

$$Q = I - P$$

$$\text{Wówczas } QP = PQ = 0, \quad Q^2 = Q \text{ (algebra),}$$

$$\text{oraz } H = \underbrace{M + Q(H)}_{\text{suma prosta}}, \quad M \cap Q(H) = \{0\} \Rightarrow P_m z = 0$$

Ponieważ $H = Q(H) + Q(H)^\perp$ więc z liniowości P wystarczy dowieść, że:

$$P_z = P_m z \text{ w 2 przypadkach:}$$

$$(1) \text{ dla } z \in Q(H)$$

$$(2) \text{ dla } z \perp Q(H)$$

$$z \in Q(H), \text{ to } z = Qz, \quad P_z = PQz = 0 \quad P_M z = 0$$

To samo zrobić trzeba w drugim przypadku (2)

$$x = Pz, y = Qz, \text{ to}$$

$$\|z\|^2 \leq \|P_z\|^2 = \|z - y\|^2 = \|z\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle z, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\rightarrow \|y\|^2 = 0 \quad y = 0 \quad \Rightarrow P_z = z$$

Twierdzenie Riesz-Frecheta (o postaci funkcjonału)

Gdy $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym na H to $\exists!_{z \in H} : \forall_{x \in H} \varphi x = \langle x, z \rangle$. Ponadto $\|\varphi\| = \|z\|$

UWAGA: $\langle x, \alpha z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle$

Dowód

Gdy $\varphi \neq 0$, niech $M = \ker \varphi \subset H$

$\exists_{y_0 \in H} : y_0 \perp M$ oraz $\varphi(y_0) = 1$

(z twierdzenia o rozkładzie - tu wykorzystujemy zupełność)

$x \in H$, to $x - \varphi(x) \cdot y_0 \in \ker \varphi = M$, bo $\varphi(x - \varphi(x)y_0) = 0$

stad $x - \varphi(x)y_0 \perp y_0$

$$\langle x - \varphi(x)y_0, y_0 \rangle = 0$$

$$\langle x, y_0 \rangle = \varphi(x) \underbrace{\langle y_0, y_0 \rangle}_{=\|y_0\|^2}$$

$$z = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$$

$$\langle x, z \rangle = \varphi(x)$$