

Zagadnienia (na razie część) do egzaminu z analizy funkcjonalnej (V 2014)

1. Kryteria ciągłości odwzorowania liniowego w przestrzeniach unormowanych i wzgl. pary seminorm. Norma $\|T\|$ operatora (jako pewien kres górny i jako kres dolny), porównanie silnej zbieżności ciągu operatorów ze zbieżnością w normie.
2. Izomorficzność skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych Hausdorffa (wystarczy-unormowanych) z przestrz. euklidesową, automatyczna ciągłość odwzorowań liniowych na nich określonych
3. Warunki równoważne ciągłości funkcjonału liniowego ϕ (o $\ker(\phi)$ oraz o $\phi(U)$, gdy $U \neq \emptyset$ -otwarty).
4. Postać funkcjonałów liniowych ciągłych: w przestrzeni Hilberta - z dowodem, (w $C([0, 1])$ oraz w $L^p(\mu)$ - bez dow.)
5. Domkniętość podprzestrzeni skończenie wymiarowych, wymiar algebraiczny przestrzeni Banacha $\neq \aleph_0$.
6. Definicja normy ilorazowej (ogólna -w przestrzeni X/M), definicja $L^p(\mu)$ dla $1 \leq p \leq \infty$. Faktoryzacja kanoniczna odwzorowań liniowych, warunek równoważny ciągłości odwzor. z przestrzeni ilorazowej (używający surjekcji kanonicznej).
7. Szeregi w przestrz. unormowanej $(X, \|\cdot\|)$: rodzaje zbieżności, kryterium "szeregowe" zupełności, Zupełność $L^p(\mu)$ i przestrzeni ilorazowych X/M (dla X z seminormą, zupełnej).
8. Twierdzenie o zupełności przestrzeni $B(X, Y)$ operatorów lin. ciągłych. $B(X) = B(X, X)$ jako algebra.
9. Szereg C. Neumanna, rezolwenta, otwartość zbioru operat. odwracalnych w $B(X)$, domkniętość widma.
10. Twierdzenie Banacha-Steinhaus. Omówić zastosowania: -szkicowo-dla szeregów Fouriera, dokładniej -dla zbiorów słabo ograniczonych.
11. Tw. Hahna-Banacha. Przypadek zespolony, przedłużanie funkcjonałów z zachowaniem normy. Wzór dualny na normę wektora, izometryczność zanurzenia kanonicznego $j : X \rightarrow X''$
12. Zastosowanie tw. Hahna-Banacha: rozdzielanie zbiorów wypukłych, tw. Mazura.
13. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o izomorfizmie i o wykresie domkniętym
14. Miary regularne i ciasne na przestrz. polskich, ośrodkowość $L^p(\mu)$, gęstość f ciągłych o nośniku zwartym.

Przestrzeń Hilberta, wstęp do teorii spektralnej

15. Twierdzenie o rzucie na zbiór wypukły domknięty w przestrzeni Hilberta (istnienie i jednoznaczność)
16. Twierdzenie charakteryzujące rzut przez nierówności dla iloczynów skalarnych (odp. -ortogonalność)
17. Rozkład ortogonalny w przestrz. Hilberta, własności rzutu ortogonalnego P (oraz $I - P$) jako operatora.
18. Zbieżność szeregu Fouriera wzgl. układu ortonormalnego, warunki równoważne zupełności takiego układu. Zupełność układu trygonometrycznego.
19. Istnienie bazy ortonormalnej w dowolnej przestrzeni Hilberta.
20. "Operator liniowy w przestrzeni Hilberta (lub z bazą Schaudera) jest zwarty $\Leftrightarrow$ jest granicą w topologii normy operatorowej pewnego ciągu operatorów liniowych ciągłych skończonego rzędu."
21. Oszacowanie normy operatora przez promień numeryczny (przypadki: samosprężony i ogólny)
22. Kresy obrazu numerycznego operatora samosprężonego należą do widma (np. $\sup W(T) \in \sigma_a(T)$).
23. Opis widma operat. normalnych (odp. zwartych i normalnych), ortogonalność ich wektorów własnych.

dojdzie jeszcze parę zagadnień. Linki do skryptów z analizy funkcjonalnej można znaleźć na stronie Prof. dr hab. Pawła Głowackiego z Uniwersytetu Wrocławskiego:

<http://www.math.uni.wroc.pl/glowacki/af.html>