

Zagadnienia do egzaminu z analizy funkcjonalnej (VI 2015)

1. Kryteria ciągłości odwzorow. liniowego w przestrzeniach unormowanych i wzgl. pary seminorm. Norma operatora (jako pewien kres górny i jako kres dolny), porównanie silnej zbieżności ciągu operatorów ze zbieżnością w normie.
2. Izomorficzność skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych X (nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) unormowanych z przestrz. euklidesową, automatyczna ciągłość odwzorowań liniowych na nich określonych.¹
3. Warunki równoważne ciągłości funkcjonału liniowego ϕ (dotyczą $\ker(\phi)$ oraz $\phi(U)$, gdy $U \neq \emptyset$ - otwarty).
4. Postać funkcjonałów liniowych ciągłych: w przestrzeni Hilberta - z dowodem, (w $C([0, 1])$, w $L^p(\mu)$ - bez dow.)
5. Domkniętość podprzestrzeni skończenie wymiarowych $Y \subset X$, wymiar algebraiczny przestrzeni Banacha $\neq \aleph_0$.²
6. Definicja normy ilorazowej (ogólna - w przestrzeni X/M), definicja $L^p(\mu)$ dla $1 \leq p \leq \infty$. Faktoryzacja kanoniczna odwzorowań liniowych.
7. Szeregi w przestrz. unormowanej $(X, \|\cdot\|)$: rodzaje zbieżności, kryterium "szeregowe" zupełności. Zupełność $L^p(\mu)$ (i przestrzeni ilorazowych X/M dla X z seminormą, zupełnej³).
8. Twierdzenie o zupełności przestrzeni $B(X, Y)$ operatorów lin. ciągłych. $B(X) = B(X, X)$ jako algebra.
9. Szereg C. Neumanna⁴, rezolwenta, otwartość zbioru operat. odwracalnych w $B(X)$, domkniętość widma.
10. Twierdzenie Banacha-Steinhaus. Omówić zastosowania: -szkicowo-dla szeregów Fouriera⁵, dokładniej - dla zbiorów słabo ograniczonych.
11. Tw. Hahna-Banacha. Przypadek zespolony, przedłużanie funkcjonałów z zachowaniem normy. Wzór dualny na normę wektora, izometryczność zanurzenia kanonicznego $j : X \rightarrow X''$
12. Zastosowanie tw. Hahna-Banacha: rozdzielanie zbiorów wypukłych, tw. Mazura.
13. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o izomorfizmie i o wykresie domkniętym
14. W.k.w. na ośrodkowość $L^p(\mu)$. Gęstość zbioru f. ciągłych o nośniku zwartym w $L^p(\mu)$ dla μ - skończonej miary borelowskiej na przestrzeni polskiej.

Przestrzeń Hilberta, wstęp do teorii spektralnej

15. Twierdzenie o rzucie na zbiór wypukły domknięty w przestrzeni Hilberta (istnienie i jednoznaczność)
16. Twierdzenie charakteryzujące rzut przez nierówności dla iloczynów skalarnych (odp. -ortogonalność) Wniosek: Rozkład ortogonalny w przestrz. Hilberta wzgl. domkniętej podprzestrzeni $M \subset H$
17. Zbieżność szeregu Fouriera wzgl. układu ortonormalnego, 3 warunki równoważne zupełności układu ortonormalnego. Zupełność ukl. trygonometrycznego.
18. Definicja operatora sprzężonego T^* dla $T : D \subset H \rightarrow H$ (gęsto określonego), elementarne własności operacji sprzężenia w przypadku ograniczonym (gdy $T \in B(H)$). Warunek wkw , by $TT^* = T^*T$.
19. Wykazać, że widmo operatora samosprzężonego jest rzeczywiste, a w przypadku zwartego samosprzężonego $T \in B(H)$ - przeliczalne i równe widmu punktowemu $\sigma_p(T)$.
20. Oszacowanie normy operatora samosprzężonego przez promień numeryczny $w(T) := \sup\{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$.
21. Kresy obrazu numerycznego należą do widma operatora samosprzężonego. Wówczas $\|T\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.
22. Twierdzenie spektralne dla operatora zwartego $T = T^* \in B(H)$.
23. Podać (szkicując bez dow. konstrukcję $E(\cdot)$) tw. spektralne dla ograniczonych operatorów samosprzężonych. Co to znaczy, że operator S jest całką $\int \phi(z)E(dz)$ z funkcji borelowskiej ϕ wzgl. miary spektralnej $E(\cdot)$, kiedy $x \in \mathcal{D}(S)$?

¹Po przeniesieniu przez zadany wyborem bazy izomorfizm zadanie sprowadza się do przypadku $X = \mathbb{K}^n$ i po sprawdzeniu ciągłości normy $\|\cdot\|$ wzgl. topologii normy euklidesowej, wystarczy, by kres dolny $\|x\|$ na sferze euklidesowej, $\delta := \inf\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}$ był > 0 .

²Z p.2 wynika zupełność Y . Gdyby $X = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, to $X = \bigcup_1^\infty Y_n$ dla $Y_n := \text{span}\{e_k : k = 1, \dots, n\}$. Stąd $\exists m \int Y_m \neq \emptyset$ (z tw.), więc $0 \int Y_m - Y_m = Y_m$. Otoczenia 0 są pochłaniające, więc $X \subset \mathbb{R}_+ \cdot Y_m = Y_m$.

³To jest proste ćwiczenie - wystarczy sprawdzić zbieżność $\sum_1^\infty [x_n]$ o ile $\|[x_n]\| \leq 2^{-n}$. Wybrać reprezentantów $\tilde{x}_n$ klas równoważn. $[x_n]$ o odp. małych (semi)normach, np. $\|\tilde{x}_n\| < 2^{-n}$. To ćwiczenie jest ważne, bo zapełnia drobną lukę w dowodzie zupełności $L^p(\mu)$

⁴Carl Gottfried Neumann (1832-1925) specjalista od równań różniczk. (zagadnienie Neumanna-Dirichleta). Chodzi o $I + \sum_1^\infty (I - T)^n$. Należy sprawdzić, że wzór ten wyraża T^{-1} , uzasadniając, dlaczego można np. lewostronnie mnożyć szereg przez $(I - T)$ „wyraz-po-wyrazie”.

⁵Można przyjąć bez wyliczania, że dla funkcjonałów $s_n(f) := \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^\pi f(t)e^{-ikt} dt$ wyrażających wartość w zerze n. sum częściowych szer. Fouriera mamy $\|s_n\| \rightarrow \infty$. Wywnioskować, że $\{f \in C([-\pi, \pi]) : f(-\pi) = f(\pi), \exists \lim s_n(f)\}$ jest zbiorem "małym" (I kategorii). Dla bardziej dociekliwych, s_n jest funkcjonałem wyrażanym przez operator całkowy z jądrem Dirichleta $D_n(t)$, czyli przez miarę $D_n(t) dt$ absolutnie ciągłą, której wahanie całkowite jest normą L^1 z funkcji D_n , czyli $\|s_n\| = \int_{-\pi}^\pi |D_n(t)| dt$, asymptotycznie $\asymp \log(n+1)$ przy $n \rightarrow \infty$.