Zagadnienia (po "redukcjach") do egzaminu z analizy funkcjonalnej (V 2014)

1. Kryteria ciągłości odwzorowania liniowego w przestrzeniach unormowanych i wzgl. pary seminorm. Norma $\|T\|$ operatora (jako pewien kres górny i jako kres dolny), porównanie silnej zbieżności ciągu operatorów ze zbieżnością w normie.
2. Izomorficzność skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych Hausdorffa (wystarczy-unormowanych) z przestrz. euklidesową, automatyczna ciągłość odwzorowań liniowych na nich określonych
3. Warunki równoważne ciągłości funkcjonału liniowego ϕ (o $\ker(\phi)$ oraz o $\phi(U)$, gdy $U \neq \emptyset$ -otwarty).
4. Postać funkcjonałów liniowych ciągłych: w przestrzeni Hilberta - z dowodem, (w $C([0,1])$ oraz w $L^p(\mu)$ - bez dow.)
5. Domkniętość podprzestrzeni skończenie wymiarowych, wymiar algebraiczny przestrzeni Banacha$\neq \aleph_0$.
6. Definicja normy ilorazowej (ogólna -w przestrzeni X/M), definicja $L^p(\mu)$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Faktoryzacja kanoniczna odwzorowań liniowych, warunek równoważny ciągłości odwzor. z przestrzeni ilorazowej (używający surjekcji kanonicznej).
7. Szeregi w przestrz. unormowanej $(X, \|\ \|)$: rodzaje zbieżności, kryterium "szeregowe" zupełności, Zupełność $L^p(\mu)$ i przestrzeni ilorazowych X/M (dla X z seminormą, zupełnej).
8. Twierdzenie o zupełności przestrzeni $B(X,Y)$ operatorów lin. ciągłych. $B(X) = B(X,X)$ jako algebra.
9. Wzór na T^{-1} bez dow.,gdy X-zupełna, $\|I - T\| < 1$, otwartość zbioru operat. odwracalnych w $B(X)$, domkniętość widma.
10. Twierdzenie Banacha-Steinhausa. Omówić zastosowania: -szkicowo-dla szeregów Fouriera, dokładniej -dla zbiorów słabo ograniczonych.
11. Tw. Hahna-Banacha. Przypadek zespolony, przedłużanie funkcjonałów z zachowaniem normy. Wzór dualny na normę wektora, izometryczność zanurzenia kanonicznego $j : X \to X''$
12. Zastosowanie tw. Hahna-Banacha: rozdzielanie zbiorów wypukłych, tw. Mazura.
13. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, o izomorfizmie i o wykresie domkniętym
14. Miary regularne i ciasne na przestrzeniach polskich, gęstość funkcji ciągłych o nośniku zwartym.

.

Przestrzenie Hilberta, wstęp do teorii spektralnej

15. Twierdzenie o rzucie na zbiór wypukły domknięty w przestrzeni Hilberta (tylko def. i wypowiedź)
16. Tw. charakteryzujące rzut przez nierówności dla ilocz. skalarnych (odp. - przez pewną ortogonalność)
17. Rozkład ortogonalny w przestrz. Hilberta, własności rzutu ortogonalnego P (oraz $I-P$) jako operatora.
18. Zbieżność szeregu Fouriera wzgl. układu ortonormalnego, warunki równoważne zupełności takiego układu. (plus: sama wypowiedź tw. Fejéra)
19. Istnienie bazy ortonormalnej w dowolnej przestrzeni Hilberta. `(Poprzedni p. 20 usunięty)`
20. Oszacowanie normy operatora przez promień numeryczny (przypadki: $T = T^*$ i ogólny - oba bez dow.)
21. Kresy obrazu numerycznego operatora samosprzężonego należą do widma (np. $\sup W(T) \in \sigma_a(T)$).
22. Opis widma operat. normalnych (odp. zwartych i normalnych), ortogonalność ich wektorów własnych.
23. Twierdzenie Spektralne dla zwartych operat. samosprzężonych
24. (zastosowanie: *Rozkład polarny* operatora zwartego)
25. Miara spektralna i definicja całki wzgl. niej. Sformułowanie Tw. Spektralnego dla $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$.
26. Ogólny zarys konstrukcji miary spektralnej dla operatora T.