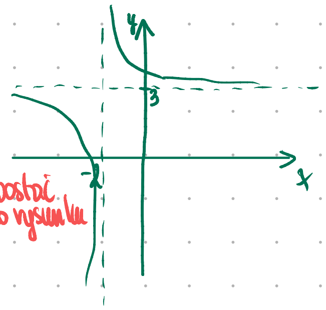
Elektrotechnika – II termin 11.02.2022



1

$$f(x)=\frac{3x+5}{2+x}=\frac{3(2+x)+1}{2+x}=3+\frac{1}{2+x}$$ 3 postać do rysunku

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $\quad$ $C_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ 3 znajduje

$f: D_f \to C_f$ jest bijekcją, jest odwracalna (zgodne z treścią zadania)

$$y=3+\frac{1}{2+x},\quad y-3=\frac{1}{2+x},\quad 2+x=\frac{1}{y-3},\quad x=\frac{1}{y-3}-2,\quad g(x)=f^{-1}(x)=\frac{1}{x-3}-2$$ 3 odwrotna wzór

$g: \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ 1 dziedzina działanie $f^{-1}(x)=g(x)$

2

A. $$\sqrt[n]{\frac{1}{3^{2n}}+\frac{4}{4^n}+\frac{1}{2^n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{9^n}+4\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}\le\sqrt[n]{\frac{1}{9^n}+4\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2^n}}\le\sqrt[n]{6\cdot\frac{1}{2^n}}$$

2 z dołu $\quad \downarrow n\to\infty \quad \frac{1}{2}$ $\quad$ korzystając z tw o trzech ciągach $\quad \downarrow n\to\infty \quad \frac{1}{2}$ $\quad$ 2 z góry

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{9^n}+4\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}$$ 1 korzysta z tw

B. $$\lim_{x\to\infty}(x-1)\left(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-x)\right)=\lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}(x-1)\ln\left(\frac{x^2-x+x+1}{x^2-x}\right)$$

1 $\quad \nearrow 1_{x\to\infty}$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x}{x+1}}\right)^{\frac{x^2-x}{x+1}}\right]^{\frac{x+1}{x^2-x}\cdot(x-1)}=\ln e^1=1$$

∞ $\quad$ 2 widzi 1^∞ $\quad$ e $\quad$ 1 dobiera 1 $\quad$ 1 wynik

3

$$h(x)=\begin{cases}\cos x & x\in(-\infty,\pi\rangle\\ ax^2+b & x\in(\pi,\infty)\end{cases}$$

CIĄGŁOŚĆ dla $(-\infty,\pi),(\pi,\infty)$ oczywista

w punkcie $x=\pi$; by h była ciągła wymagamy, by $\lim_{x\to\pi}h(x)=h(\pi)$

$h(\pi)=\cos\pi=-1$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi^-}h(x)=\lim_{x\to\pi^-}\cos x=-1\\&\lim_{x\to\pi^+}h(x)=\lim_{x\to\pi^+}ax^2+b=a\pi^2+b\end{aligned}\right\}$$ 3 granica

aby h była ciągła w $x=\pi$ (w efekcie na $\mathbb{R}$) to $a\pi^2+b=-1$

$\boxed{b=-1-a\pi^2}$ 1 wniosek

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ dla $(-\infty,\pi),(\pi,\infty)$ oczywista

w punkcie $x=\pi$, sprawdzę czy istnieje $\lim_{x\to\pi}\frac{h(x)-h(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{h(x)-(-1)}{x-\pi}$ ZNAK

(choć łatwiej od razu posłużyć się tu def $(\cos x)'$)

2 lewostronna

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{h(x)+1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x+1}{x-\pi}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi^-}\frac{-\sin x}{1}=0$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{h(x)-(-1)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{ax^2+b+1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{ax^2-1-a\pi^2+1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{a(x^2-\pi^2)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{a\cancel{(x-\pi)}(x+\pi)}{\cancel{x-\pi}}=$$

2 prawostronna

bez ciągłości nie ma różniczkowalności, czyli $b=-1-a\pi^2$

$=2\pi\cdot a$

Wobec tego $0=2\pi a$, by h była różniczkowalna w $x_0=\pi$ (na $\mathbb{R}$), zatem: $a=0,\ b=-1$ 1 wniosek

$$h'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{h(x)-h(\pi)}{x-\pi}=0$$ 1 pochodna w punkcie π

④
$$f(x)=\frac{1}{(1+\ln x)^2}$$
Z: $x>0$
$1+\ln x\neq 0 \quad x\neq e^{-1}=\frac{1}{e}$

$D_f=(0,\infty)\setminus\{e^{-1}\}$ ① dziedzina

③ pochodna
$$f'(x)=-2\,\frac{1}{(1+\ln x)^3}\cdot(1+\ln x)'=-2\,\frac{1}{(1+\ln x)^3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-2x\cdot(1+\ln x)}{x^2\,(1+\ln x)^4}$$
$D_{f'}=D_f$

o znaku $f'(x)$ decyduje licznik $-2x\,(1+\ln x)$
bo mianownik (potęga parzysta) zawsze >0.

	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},\infty)$
$-2x$	$-$	X	$-$
$1+\ln x$	$-$	X	$+$
$f'(x)$	$+$	X	$-$

③ znak f'

dla $x\in(0,\frac{1}{e})$ $f\nearrow$
dla $x\in(\frac{1}{e},\infty)$ $f\searrow$

② wnioski

f nie ma ekstremów lokalnych ①

⑤
$$\int(2-x)\cdot\cos(2x+1)\,dx=\left|\begin{matrix} u=2-x & v'=\cos(2x+1)\\ u'=-1 & v=\frac{1}{2}\sin(2x+1)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}(2-x)\sin(2x+1)+\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)\,dx$$
③ przez części

STAŁA!

ZNAK

② wynik
$$=\frac{1}{2}(2-x)\sin(2x+1)-\frac{1}{4}\cos(2x+1)+C$$

$$\int\frac{(\sqrt{\arccos x}+5)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|\begin{matrix} t=\arccos x\\ dt=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ -dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{matrix}\right|=\int(\sqrt{t}+5)^2\,(-1)\,dt$$
② podstawienie

ZNAK
$$=-\int t+10\sqrt{t}+25\,dt=$$
$$=-\frac{t^2}{2}+\frac{20}{3}t^{\frac{3}{2}}+25t+C$$
②
$$=-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\frac{20}{3}(\arccos x)^{\frac{3}{2}}+25\arccos x+C$$
① powrót do x

$$\int\frac{4x+3}{x^2+1}\,dx=\int\frac{2\cdot 2x+3}{x^2+1}\,dx=2\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$
③

POCHODNA MIANOWNIKA W LICZNIKU
$$=2\ln(x^2+1)+3\,\mathrm{arctg}\,x+C$$
①