

Przykładowe rozwiązania (odpowiedzi) na ostatni test z teorii

1. Podać definicję granicy funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$ w przypadku granic:

(a) skończonej: $g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \dots$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, b) \mathbf{0} < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

(uwaga: tu dziedziną był przedział (a, b) . Gdyby nie było tego założenia, to piszemy pod ostatnim kwantyfikatorem " $\forall_{x \in \mathcal{D}(f)}$ " W przypadku granicy jednostronnej (np. lewostronnej - bo dla prawostronnej bierzemy w odpowiednim miejscu zapisu $x_0 < x < x_0 + \delta$):

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}(f) (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

(b) niewłaściwej:

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall M \exists \delta > 0 \forall x \in (a, b) \mathbf{0} < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

(w przypadku $-\infty$ -zamiast $f(x) > M$ będzie na końcu tego warunku : $f(x) < M$. Aby ująć obydwie przypadki -celowo nie piszę " $\forall M > 0$ " - wtedy dla przypadku granicy $-\infty$, jeśli napiszemy, że $m > 0$ - to trzeba będzie na końcu zapisać $f(x) < -M$.

2. Sformułować twierdzenie Weierstrassa o własnościach funkcji ciągłych na przedziale domkniętym ($\Delta = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$).

Na przedziałach domkniętych i ograniczonych funkcje ciągłe są ograniczone i osiągają swoje kresy: istnieją punkty $x_1, x_2 \in [a, b]$ takie, że f osiąga minimum w punkcie x_1 oraz maksimum w punkcie x_2 .

3. Podać definicję pochodnej $f^{(k)}$ rzędu k dla funkcji $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. (chodzi o wzór rekurencyjny, zakładając, że definicję dla $k = 1$ już znamy) Ile wynosi pochodna rzędu 5 dla $f(x) = 3^x$?
 $\mathbf{f}^0 = f, \mathbf{f}^{(k+1)} = (\mathbf{f}^{(k)})'$, gdzie "prim" -czyli symbol ' oznacza pochodną. Stałe można wyciągnąć przed znak pochodnej (z liniowości operacji brania pochodnej), taką stałą jest $\ln 3$, więc $(3^x)'' = (\ln 3 \cdot 3^x)' = \ln 3 \cdot (3^x)' = (\ln 3)^2 \cdot 3^x \dots$ stąd $(\mathbf{3}^x)^{(5)} = (\ln \mathbf{3})^5 \cdot \mathbf{3}^x$. Oczywiście, kropkę-symbol mnożenia -zazwyczaj opuszczamy.

4. Sformułować twierdzenie Fermata o warunku koniecznym na to, by funkcja różniczkowalna f osiągała w danym punkcie x_0 ekstremum lokalne.

Warunkiem koniecznym jest, by pochodna była równa zero w tym punkcie: $f'(x_0) = 0$. Warunek ten jest konieczny, ale nie wystarczający -np. dla $f(x) = x^3, x_0 = 0$ mamy $f'(0) = 0$, ale f nie ma ekstremum lokalnego w $x_0 = 0$, bo w każdym otoczeniu zera są wartości zarówno większe od $f(0)$, jak i mniejsze.

5. Sformułować wzór na pochodną w danym punkcie $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ z funkcji $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ odwrotnej do $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ (podając istotne założenie)//

Poza różniczkowalnością f w punkcie x_0 trzeba założyć, że $f'(x_0) \neq 0$. Wówczas mamy równość $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. Jak ktoś wpisał $\frac{1}{f'(x_0)}$, też to uznawałem- chociaż po obydwu stronach tego wzoru powinna być ta sama zmienna: y_0 .