

## 13 Całki krzywoliniowe

W dalszym ciągu przez krzywą w  $\mathbb{R}^n$  będziemy rozumieli odwzorowanie ciągle  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ponieważ  $\gamma(t)$  jest wektorem o współrzędnych  $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ , funkcję  $\gamma_j$  nazwiemy  $j$ -tą współrzędną tej krzywej. Będziemy też zakładali, że jest to odwzorowanie klasy  $C^1$ , czyli wszystkie te współrzędne są funkcjami klasy  $C^1$ . Wówczas jak już zauważyliśmy, gdy  $\gamma'(t)$  oznacza wektor  $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ , to długość tej krzywej, to całka z normy euklidesowej tego wektora:  $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ . Jeśli potraktować  $d\ell$  jako wszystko to, co znajduje się w po znaku całki, czyli gdy  $d\ell(t) = \|\gamma'(t)\| dt$ , będzie to tak zwana "różniczka długości", nazywana też "elementem długości" na tej krzywej.

Całkę krzywoliniową nieskierowaną  $\int_\gamma f(x) d\ell$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  z funkcji skalarnej  $f$  określonej na punktach  $\gamma$  nazywaną też całką niezorientowaną po krzywej  $\gamma$ , lub całką krzywoliniową pierwszego rodzaju definiujemy wzorem

$$\int_\gamma f(x) d\ell, \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) d\ell(t) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Jedną z interpretacji jest ciężar krzywej materialnej, której jednostka długości w punkcie  $t$  ma wagę  $f(t)$  (np. ten ciężar właściwy jest wyrażany w gramach na centymetr. Ten ciężar może się zmieniać wraz ze zmianą parametru  $t$ . Np. możemy zanurzyć łuk z jednorodnego kawałka drewna w wodzie, ale siła wyporności na różnej głębokości będzie różna i wynik całkowity będzie ciężarem, jaki odczuwamy po uwzględnieniu wyporności wody.

Dla krzywej płaskiej ( $n=2$ ) mamy np.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{zaś} \quad d\ell(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Gdy krzywa jest wykresem funkcji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , czyli  $\gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$ , to  $d\ell(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ . Korzystając z definicji zwykłej całki Riemanna można wywnioskować coś, co w bardziej zaawansowanych kursach przyjmuje się jako definicję takiej całki nieskierowanej: Jeśli mamy ustalony podział odcinka parametryzującego tę krzywą w postaci  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ , oraz jeśli przez  $\ell(\Delta_j)$  określimy długości  $j$ -tych odcinków cięciw tej krzywej, czyli odcinków o końcach  $\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)$ , i gdy mamy zadany układ punktów pośrednich  $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ , to **sumą całkową dla całki nieskierowanej nazywamy sumę**

$$\sum_{j=1}^m f(\gamma(\xi_j)) \ell(\Delta_j).$$

Całka nieskierowana z  $f$  po krzywej  $\gamma$ , to granica takich sum, gdy średnice podziałów odcinka  $[a, b]$  punktami  $t_j$  zmierzają do zera. Jest to więc całka bardzo podobna do zwykłej całki Riemanna.

Ciekawsza jest całka drugiego typu, gdy całkujemy wzdłuż krzywej  $\gamma$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  tak zwane pole wektorowe  $\vec{F}$  określone w punktach tej krzywej, czyli odwzorowanie, którego wartościami są wektory  $\vec{F}(x) \in \mathbb{R}^n$ . Dla dwu zmiennych składowe takiego pola (czyli współczynniki wektora  $\vec{F}(x)$  oznaczamy często w przypadku  $n = 2$  jako  $P, Q$ , zamiast punktu  $x \in \mathbb{R}^n$  rozważamy jego współrzędne  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ).

**Definicja** Całkę krzywoliniową z pola wektorowego  $\vec{F}(x)$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  definiujemy jako całkę z iloczynów skalarnych wektorów tego pola przez wektory pochodnej tego pola. Np. dla  $n = 2$  przyjmujemy

$$\int_\gamma P dx + Q dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

W sytuacji ogólnej (krzywa w  $\mathbb{R}^n$ ) całkę tego II typu definiujemy wzorem

$$\int_{\gamma} \vec{F}(x) dx = \int_{\gamma} F_1(x) dx_1 + \dots + F_n(x) dx_n := \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

gdzie nawias  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny, czyli iloczyn długości wektorów pomnożony przez cosinus kąta między nimi. Wektor  $\gamma'(t)$ , to wektor styczny do krzywej.

W jednej z interpretacji fizycznych, dla pola sił  $\vec{F}$  działającego w punktach krzywej na punkt materialny poruszający się po tej krzywej, nasza całka przedstawia pracę wykonaną podczas ruchu wzdłuż krzywej w obecności tego pola sił. Jest ona maksymalna gdy siła przykładana jest w kierunku przebiegu krzywej, zaś jest ona zerowa gdy kierunki sił działających są prostopadłe do krzywej (tzn. do jej wektorów stycznych).

Wyjątkowo ważny jest wzór Greena wiążący całkę po krzywej zamkniętej na płaszczyźnie z całką podwójną po obszarze ograniczonym taką krzywą. Zaczniemy od definicji.

**Definicja.** Krzywą  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazywamy krzywą zamkniętą, gdy  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Jeśli krzywa zamknięta jest ponadto odwzorowaniem injektywnym poza końcami przedziału, czyli na odcinku otwartym  $(a, b)$ , to nazywamy ją krzywą Jordana. Warunek injektywności oznacza, że nie ma punktów "samo-przecięcia" tej krzywej. Obszarem nazywamy zbiór otwarty, którego każde dwa punkty można połączyć krzywą zawartą w danym zbiorze. Mówimy, że krzywa  $\gamma$  leżąca na brzegu obszaru  $D$  jest dodatnio zorientowana względem tego obszaru, gdy poruszając się wzdłuż  $\gamma(t)$  w kierunku wzrastającego argumentu  $t$  mamy obszar  $D$  po lewej stronie.

Na przykład, okrąg  $(\cos t, \sin t)$  jest dodatnio zorientowany względem koła  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Matematyk francuski Camille Jordan wykazał, że każda krzywa Jordana w  $\mathbb{R}^2$  wycina z płaszczyzny dokładnie jeden obszar ograniczony  $\Omega$ , zwany "wnętrzem krzywej zamkniętej  $\gamma$ ". Dokładniej, jeśli z płaszczyzny usuniemy zbiór wszystkich punktów krzywej Jordana, to otrzymamy dwa obszary: jeden nieograniczony, drugi ograniczony. Przykładem takiej krzywej jest np. okrąg, czy brzeg elipsy.

**Twierdzenie (Wzór Greena).** Jeżeli  $D$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^2$  normalnym względem każdej z osi, którego brzeg jest krzywą Jordana klasy  $C^1$ , dodatnio zorientowaną względem  $D$ , to dla pola wektorowego  $P\vec{i} + Q\vec{j}$  klasy  $C^1$ , określonego na w punktach domknięcia zbioru  $D$ , mamy

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy. \quad (1)$$

Dowód sprowadza się do zastosowania twierdzeń o iterowaniu całki podwójnej po obszarze normalnym i do wzoru Newtona-Leibniza. Osobno liczymy całki względem  $dx$  ze składowej  $P$  naszego pola, osobno -z  $Q$ , używając normalności obszaru raz względem  $OX$ , w drugim przypadku -wzgl.  $OY$ . Szczegóły pomijam.

Wzoru tego możemy np. użyć do obliczenia pola obszaru  $D$  ograniczonego przez krzywą Jordana  $\gamma$ . Wiemy, że pole  $m_2(D)$  (= 2-wymiarowa miara Jordana) jest równe całce podwójnej po obszarze  $D$  z funkcji stałe równej 1. Dobieramy funkcje  $P, Q$  tak, by było  $Q'_x - P'_y = 1$ . Możemy to uczynić na parę sposobów: np.

$$m_2(D) = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma} (-y) dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx).$$

Na przykład dla elipsy  $(a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  pierwsza z całek, to

$$\int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t = \pi ab.$$

Przypuśćmy, że mamy taką sytuację: dwie krzywe,  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mają taki sam początek: punkt  $A = (x_0, y_0)$  i taki sam koniec  $B = (x_1, y_1)$ , natomiast pole wektorowe o współrzędnych  $(P, Q)$  jest określone w jakimś większym

obszarze zawierającym obydwie krzywe. Czy (albo: kiedy) całki z tego pola po tych krzywych będą równe? (Jeśli dla każdej krzywej w danym obszarze o początku  $A$  i końcu  $B$  całki będą równe, to powiemy, że te całki nie zależą od drogi całkowania, a jedynie od punktów: początkowego i końcowego. Okazuje się, że zależy to głównie od pola  $(P, Q)$ . Analogiczną sytuację możemy rozważać w przestrzeni trójwymiarowej - dla pola  $(P, Q, R)$  i w tym przypadku podamy definicję, którą dla  $n = 2$  łatwo otrzymać usuwając zmienną  $z$  i dotyczące jej warunki.

**Definicja.** Funkcję  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy potencjałem pola  $(P, Q, R)$  w obszarze  $D$ , jeśli składowe tego pola są odpowiednio jej pochodnymi cząstkowymi:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

gdzie równości zachodzą w każdym z punktów  $(x, y, z)$  obszaru  $D$ .

Potencjał nie musi istnieć, jeśli istnieje - to pole nazywamy polem potencjalnym. Kluczowym narzędziem przy badaniu potencjalności pola okazuje się tak zwana rotacja pola. Podamy osobno jej 2-wymiarowy oraz 3-wymiarowy wariant. W przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  rozważamy pole wektorowe  $(P, Q)$ , zaś w  $\mathbb{R}^3$  -pole  $\vec{F} = (P, Q, R)$ . ich rotacje określamy odpowiednio przez

$$\text{rot}(P, Q) = Q'_x - P'_y, \quad \text{rot}(P, Q, R) = \vec{i}(R'_y - Q'_z) + \vec{j}(P'_z - R'_x) + \vec{k}(Q'_x - P'_y).$$

Tak więc równość we wzorze Greena można skrótowo zapisać w następującej postaci:  $\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \text{rot}(P, Q) dx dy$ , gdzie  $\partial D$  oznacza krzywą będącą brzegiem obszaru normalnego  $D$  dodatnio zorientowanym względem tego obszaru. Dla  $n = 3$  zachodzi w pewnym sensie analogiczny wzór Stokesa, który poznamy w następnym wykładzie. Rotacja jest tu polem wektorowym i całka po prawej stronie będzie tak zwanym strumieniem tego pola przez zewnętrzną stronę brzegu obszaru. Istnieje pewien łatwiejszy sposób zapamiętania, czym jest wektor rotacji. Jest to "formalny wyznacznik" macierzy

$$\text{rot}(P, Q, R) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}.$$

Ogólna odpowiedź na powyżej sformułowane pytania w przypadku obszarów normalnych (czy ogólniej - dla  $n=2$  dla obszarów "nierozcinających płaszczyzny", dla  $n=3$  - dla obszarów jednospójnych) jest zawarta w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie.** Jeżeli pole wektorowe  $\vec{F}$  jest klasy  $C^1$  w obszarze normalnym  $D$ , to następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje potencjał  $\Phi$  dla tego pola.
2. Całki krzywoliniowe zorientowane po krzywych  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  nie zależą od drogi całkowania, a jedynie od punktów:  $A := \gamma(a), B := \gamma(b)$ .
3. Całki po krzywych zamkniętych z  $\vec{F}$  są równe zero
4.  $\text{rot} \vec{F} = 0$  w każdym punkcie obszaru  $D$ .

Ponadto, jeśli któryś z tych warunków zachodzi, to całka z pola  $\vec{F}$  wzdłuż takiej krzywej  $\gamma$  jest równa różnicy potencjałów:  $\Phi(B) - \Phi(A)$ .

W związku ze wspomnianą niezależnością od drogi całkowania, całkę w polu potencjalnym zapisujemy często w postaci  $\int_A^B P dx + Q dy + R dz$ . W takiej sytuacji zazwyczaj punkty  $A, B$  zapisywane są jako układ (dwu lub trzech) współrzędnych. Zwróćmy uwagę na fakt, że potencjał pola jest (o ile istnieje) wyznaczony jedynie z dokładnością do stałej - podobnie, jak to było z funkcją pierwotną dla przypadku  $n = 1$ . Poszukiwania potencjału warto

rozpocząć od sprawdzania warunku koniecznego. Na przykład, jest on spełniony dla  $(P, Q) = (e^{\sin y}, 2y + x \cos ye^{\sin y})$ , a nie jest spełniony gdy np.  $(P_1, Q_1) = (e^{\sin y}, x^2 \cos ye^{\sin y})$  i zobaczmy, jak w pierwszym przypadku można znaleźć potencjał  $\Phi$ . Z warunku  $\Phi'_x = e^{\sin y}$  -traktując  $y$  jako ustalone, znajdujemy, że  $\Phi(x, y) = xe^{\sin y} + C(y)$ , gdzie  $C(y)$  jest stałą całkowania- ale ona może zależeć od  $y$ . Teraz liczymy pochodną po  $y$  z tak otrzymanej funkcji:  $\frac{\partial}{\partial y}[xe^{\sin y} + C(y)] = x \cos ye^{\sin y} + C'(y)$  Porównując otrzymany wynik z funkcją  $Q$  widzimy, że musi być  $C'(y) = 2y$ , czyli  $C(y) = y^2 + C$ . Tym razem stała  $C$  już nie zależy od  $x$ . Gdyby z rachunków wyniknęło co innego, to z pewnością rotacja nie była by zerem i po prostu -brak potencjału! Ostatecznie więc  $\Phi(x, y) = y^2 + xe^{\sin y}$ . Sprawdzamy licząc  $\Phi'_x, \Phi'_y$  -i okaże się, że faktycznie, warunki na potencjał są tu spełnione. Gdybyśmy w drugim przypadku nie sprawdzili warunku koniecznego (zerowania się rotacji), to próbując, jak poprzednio -z równania  $\Phi'_x = P_1$  otrzymamy dokładnie to samo, czyli - że musi być  $\Phi(x, y) = xe^{\sin y} + C(y)$  dla pewnej funkcji  $C(y)$  już nie zależącej od zmiennej  $x$ . Stąd pochodna po  $y$ , równa  $x \cos ye^{\sin y} + C'(y)$  - powinna z drugiej strony być równa  $Q_1(x, y) = x^2 \cos ye^{\sin y}$ . Odjęcie stronami da nam "podejrzaną równość":  $(x^2 - x) \cos ye^{\sin y} = C'(y)$ . I tu mamy problem: Funkcja  $C(y)$ , jak i jej pochodna -nie zależą od  $x$ . Natomiast lewa strona -zależy (przy ustalonym  $y$  -różniczkując po  $x$  dostaniemy sprzeczność typu:  $(2x - 1) \cos ye^{\sin y} = 0$ . Bo w naszym otwartym zbiorze  $D$  mogą się zmieniać (o ile zmiany będą małe) zarówno  $x$ , jak i  $y$ , wtedy będzie np.  $\cos y \neq 0$  -co spowoduje wymuszenie stałej wartości dla  $x$  typu  $x = \frac{1}{2}$ .

Wracając do pola  $(P, Q)$  z tego przykładu - łatwo teraz policzyć całki po krzywych o początku np.  $A = (0, 0)$  i końcu  $B = (7, 1)$ . Wynikiem będzie  $\Phi(B) - \Phi(A)$ , gdzie  $\Phi(x, y) = y^2 + xe^{\sin y}$ .