

1 Szeregi liczbowe

Zacznijmy od definicji szeregu liczbowego. Chodzi nam o to, by używać pojęcia „szeregu formalnego” niezależnie od tego, czy jego suma istnieje, czy też nie, gdyż będziemy czasami mieli do czynienia z szeregami rozbieżnymi.

Definicja 1 *Szeregiem liczbowym o wyrazach $x_n \in \mathbb{C}$ będziemy nazywać ciąg „sum częściowych” $(S_k)_{k=0,1,\dots}$, gdzie*

$$S_k := \sum_{n=0}^k x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_k.$$

Czyli szereg, to ciąg:

$$\begin{aligned} & x_1, \\ & x_1 + x_2, \\ & x_1 + x_2 + x_3, \\ & \dots \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k, \\ & \dots \end{aligned}$$

Czasami wygodnie jest pisać $S_k(x_n)$ zamiast S_k . Mówimy, że ten szereg jest zbieżny, o sumie równej S , co zapisujemy symbolem $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, gdy ciąg (S_k) jest zbieżny do granicy skończonej, przy czym $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Skrótowo, mamy więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n.$$

Możemy też zdefiniować $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ jako szereg $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$, gdzie $y_0 = \dots = y_{p-1} = 0, y_n = x_n$ dla $n \geq p$. W szczególności często będziemy spotykali $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. W takim przypadku $S_k = x_1 + \dots + x_k$.

Zacznijmy od „trywialnych przykładów”, gdy $x_1 = x_2 = \dots = 0$, to S_k jest ciągiem stałym równym x_0 i taka jest też suma badanego szeregu. Podobnie, gdy ciąg x_n jest równy zero od pewnego miejsca (dla $n \geq M$), to ciąg S_k jest stały od tego miejsca, zaś suma szeregu jest wtedy równa sumie skończonej $x_0 + \dots + x_M$.

Bez wątpienia, najważniejszym szeregiem jest *szereg geometryczny* (o wyrazach zespolonych). Odpowiada on ciągowi geometrycznemu postaci

$$x_n = aq^n,$$

gdzie $q \neq 0$ jest tzw. ilorazem ciągu geometrycznego. (Faktycznie, $\forall_{n \in \mathbb{N}} q = \frac{x_n}{x_{n-1}}$). Dla ciągu samych zer możemy przyjąć $a = 0, q = 1$. Ogólnie, $q^0 = 1$, więc $a = x_0, x_1 = aq, x_2 = aq^2, \dots$. Tu mamy $qS_k = S_k + aq^{k+1} - a$, więc dla $q \neq 1$ otrzymujemy $S_k = \frac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$. Szereg jest więc zbieżny do $\frac{a}{1-q}$ gdy $|q| < 1$. (Ciąg geometryczny aq^{k+1} jest zbieżny do zera przy $|q| < 1$, stały dla $q = 1$ i rozbieżny gdy $q \neq 1, |q| \geq 1, a \neq 0$. Ciąg S_k jest rozbieżny dla $a \neq 0, |q| \geq 1$, bo w tym przypadku gdy $q = 1$, mamy $x_n = a$, zaś $S_k = (k+1)a$. Na przykład, $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2$. Jak łatwo zauważyć, pomnożenie przez q^m tylko „przesuwa wyrazy ciągu aq^n o m miejsc w prawo” oraz

$$\sum_{n=m}^{\infty} aq^n = \frac{aq^m}{1-q} \quad \text{gdy } |q| < 1.$$

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $x_n = S_n - S_{n-1}$. Jeśli istnieje granica skończona $S = \lim S_n$, to również $S = \lim S_{n-1}$, więc wówczas $\lim x_n = S - S = 0$. Stosując arytmetykę granic, możemy więc sformułować następującą tezę:

Twierdzenie 1 Dla szeregów zbieżnych mamy następujące własności:

1. **WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI** Wyrazy szeregu zbieżnego muszą dążyć do zera
2. **LINIOWOŚĆ** Gdy szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg sum $a_n + b_n$, przy czym $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Podobnie, dla dowolnej stałej C mamy $\sum_{n=0}^{\infty} C a_n = C \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. **Zbieżność szeregu nie zależy od początkowych wyrazów:** Gdy tylko istnieje $M \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall n \geq M \Rightarrow x_n = y_n$, to ze zbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.
4. **WARUNEK CAUCHY'EGO RÓWNOWAŻNY ZBIEŻNOŚCI** Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \left| \sum_{n=M+1}^{M+k} x_n \right| < \epsilon.$$

5. **Szereg o wyrazach nieujemnych** jest zbieżny (do $S = \sup\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.

Drugą tezę otrzymamy zauważywszy, że $S_k(a_n + b_n) = S_k(a_n) + S_k(b_n)$, zaś $S_k(Ca_n) = CS_k(a_n)$. W następnej tezie zauważmy, że ciąg $S_k(y_n) = S_k(x_n) + S_k(y_n - x_n)$, różnica $S_k(y_n) - S_k(x_n)$ jest więc ciągiem stałym od miejsca o indeksie $k = M$. Na koniec -zauważmy, że pod modułem w warunku (4) jest suma skończona, równa $S_{M+k} - S_M$, więc jest to warunek Cauchy'ego dla ciągu (S_k) .

Dla szeregów o wyrazach $x_n \geq 0$ ciąg (S_k) jest niemalejący, więc w tym przypadku jego zbieżność jest równoważna ograniczoności, zaś $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_k S_k$.

W przypadku szeregów o wyrazach nieujemnych (i tylko takich!) zbieżność będziemy zapisywać w postaci warunku

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty, \quad \text{a rozbieżność -jako warunek} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty.$$

Uwaga! Warunek z tezy 1 ostatniego twierdzenia jest konieczny, ale nie wystarczający: chociaż $\lim \frac{1}{n} = 0$, wykazemy, że dla szeregu harmonicznego mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Gdyby bowiem ten szereg był zbieżny, to dla $S_k = S_k(\frac{1}{n})$ powinno być $\lim S_{2k} = \lim S_k$, zaś $\lim S_{2k} - S_k = 0$. Tak jednak nie jest, gdyż mamy

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k}$$

Składników w ostatniej sumie jest k , więc ta suma równa jest $\frac{1}{2}$ i (wbrew naszemu przypuszczeniu) NIE ZMIERZA DO ZERA. Szereg harmoniczny jest więc rozbieżny. Dla tego szeregu wyraz x_0 postaci $\frac{1}{0}$ nie ma, oczywiście, sensu, sumowanie zaczyna się od $n = 1$. Dla szeregu $\sum \frac{1}{n \ln n}$ trzeba sumować od $n = 2$. Warto więc pamiętać, że zbieżność szeregu nie zależy od początkowych wyrazów. Wartość sumy -już zależy, ciągi sum częściowych dla 2 szeregów różniących się tylko początkowymi wyrazami różnią się bowiem od pewnego miejsca o stałą.

Nietrywialny przykład szeregu zbieżnego, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, zbieżny do 1. Aby to sprawdzić - zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Więc k -ta suma częściowa jest tu równa

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1.$$

Niełatwo jest natomiast wyznaczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

tą sumą jest $\frac{\pi^2}{6}$. Sprawdzimy jedynie samą jego zbieżność. Ponieważ $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, sumy częściowe spełniają $S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) \leq S_k(\frac{1}{n(n+1)})$, są więc ograniczone, bo już wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$. Ponieważ $\lim_k S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, otrzymujemy dowodzoną zbieżność.

Do wykazania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie $\alpha > 1$ (i rozbieżności gdy $\alpha \leq 1$) wygodnie jest użyć tzw. *kryterium całkowego zbieżności szeregów*:

Twierdzenie 2 KRYTERIUM CAŁKOWE. *Jeśli $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ jest funkcją nieujemną, nierosnącą, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ jest zbieżna.*

Najczęściej przy badaniu zbieżności szeregów korzystamy jednak z następującego kryterium

Twierdzenie 3 KRYTERIUM PORÓWNAWCZE. *Jeśli moduły wyrazów x_n są mniejsze lub równe od wyrazów y_n pewnego szeregu zbieżnego $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest też zbieżny.*

Przez kontrapozycję otrzymujemy stąd warunek na rozbieżność $\sum y_n$: zachodzi ona, jeśli $|x_n| \leq y_n$ ($\forall_n$) oraz szereg $\sum x_n$ jest rozbieżny. Pożyteczny jest też wariant kryterium porównawczego, ale dla $x_n, y_n > 0$:

ILORAZOWE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE *Jeśli tylko $\lim_{y_n} \frac{x_n}{y_n} = C$, gdzie $0 < C < +\infty$, to szereg $\sum x_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum y_n$ jest zbieżny.*

Dowodząc kryterium w wersji podstawowej, sprawdzamy warunek (4), szacując

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+k} x_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{M+k} |x_n| \leq \sum_{n=M+1}^{M+k} y_n.$$

Ostatnie sumy są dowolnie małe przy M dostatecznie dużych (niezależnie od k), z tego samego kryterium dla szeregu zbieżnego $\sum y_n$.

Sztuka doboru majorant y_n jest istotna, jednak są szeregi zbieżne, dla których takich „sumowalnych majorant” nie ma. Minimalnymi majorantami są bowiem liczby $|x_n|$. Zaraz zobaczymy, kiedy takich majorant nie można skutecznie stosować.

Mówimy, że **szereg $\sum x_n$ jest bezwzględnie zbieżny**, gdy $\sum |x_n| < +\infty$. Wówczas też sam ciąg (x_n) o powyższej własności nazwiemy *ciągami sumowalnymi*. Dzięki kryterium porównawczemu, szereg bezwzględnie zbieżny musi być zbieżny. Jednak istnieją szeregi zbieżne, które nie są zbieżne bezwzględnie (nazywamy je *szeregami zbieżnymi warunkowo*). Takim szeregiem jest np. szereg Leibniza $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. (Jak się okaże, jego sumą jest $\ln 2$.) Nie jest on zbieżny bezwzględnie (moduły tworzą szereg harmoniczny rozbieżny: $\sum \frac{1}{n}$). Zbieżność szeregu Leibniza wynika z następującego kryterium:

Twierdzenie 4 Kryterium Leibniza. *Jeśli ciąg a_n zmierza w sposób malejący (nierosący) do zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.*

Sprawdźmy np. „charakter zbieżności” dla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{2n+1}}$. W mianowniku mamy tu ciąg rosnący, bo funkcja $\sqrt{\cdot}$ jest rosnąca. Licznik $= C \cdot (-1)^{n+1}$, gdzie C jest stałą $C = -1$. Z dokładnością do tego stałego czynnika, mamy więc ciąg spełniający założenia kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny. Ale tylko warunkowo, bo tu $|x_n| \geq \frac{1}{2n}$, a ta stała wielokrotność szeregu harmonicznego jest rozbieżna. Nie zawsze zmiana znaku jest „regularna”, np. gdy mamy szereg typu $\sum \frac{\sin n}{n}$. Wówczas przydatne jest *Kryterium Dirichleta*, które sformułujemy później w ogólniejszym przypadku - dla szeregów funkcyjnych.

W większości przypadków szeregi $\sum x_n$, z którymi będziemy mieli do czynienia będą jednak albo zbieżne, albo bezwzględnie zbieżne. W przestrzeniach

unormowanych interesować nas będzie też głównie zbieżność bezwzględna, definiowana dla wektorów $\mathbf{w}_n$ przez warunek $\sum \|\mathbf{w}_n\| < +\infty$. Prowadzi to zawsze do badania zbieżności pewnych szeregów o wyrazach nieujemnych (dla $a_n = |x_n|$ lub $a_n = \|\mathbf{w}_n\|$). Dla takich szeregów najczęściej będziemy korzystali z jednego z dwu następujących kryteriów:

Twierdzenie 5 PODSTAWOWE KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI

KRYTERIUM d'ALEMBERTA Jeśli $a_n > 0$ oraz $g := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to przy $g < 1$ szereg jest zbieżny, zaś dla $g > 1$ -rozbieżny.

KRYTERIUM CAUCHY'EGO Jeśli $a_n \geq 0$ oraz $\gamma := \lim \sqrt[n]{a_n}$, to przy $\gamma < 1$ szereg jest zbieżny, zaś dla $\gamma > 1$ -rozbieżny.

Założenia można nieco uogólnić, postulując zamiast $g < 1$ zachodzenie dla pewnego $q < 1$ warunku $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ (a zamiast $g > 1$ -warunek $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$) dla wszystkich n od pewnego miejsca poczynsz. Analogicznie dla warunku $\gamma < 1$. (Takie tezy są zresztą pierwszym krokiem dowodu. Dla ich sformułowania można używać pojęć: granicy dolnej i granicy górnej ciągu, których jednak nie będziemy wprowadzali). Natomiast gdy $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ dla nieskończenie wielu n , to nie może zachodzić warunek konieczny (=zbieżność ciągu wyrazów szeregu do zera). W przypadkach $g < 1$ oraz $\gamma < 1$ korzystamy z kryterium porównawczego, gdyż dla pewnej stałej C i dla dostatecznie dużych n otrzymamy oszacowania $a_n \leq Cq^n$.

Zauważmy, że w przypadku $g = 1$ lub $q = 1$ żadne z kryteriów nie rozstrzyga o zbieżności: Takie równości zachodzą zarówno dla szeregu harmonicznego (rozbieżnego) $\sum \frac{1}{n}$, jak i dla szeregu zbieżnego $\sum \frac{1}{n^2}$. Można wykazać, że gdy kryterium d'Alemberta rozstrzyga (o zbieżności, bądź rozbieżności), to również rozstrzyga kryterium Cauchy'ego. Można więc zapytać, czy nie wystarczy znać tylko to drugie, silniejsze kryterium? Na ogół w przypadkach, gdy wyraz szeregu zawiera jako czynnik silnię -warto korzystać z kryterium d'Alemberta, gdyż po podzieleniu $(n+1)!$ przez $n!$ uzyskamy po prostu $n+1$ jako odpowiedni czynnik. Liczenie granicy zawierającej jako czynnik $\sqrt[n]{n!}$ jest bardzo trudne.

Jako ciekawostkę podajmy tu pewien wzór (tzw. wzór Stirlinga), pozwalający w praktyce przybliżać wartość silni dla dużych n :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{\theta \in (0,1)} n! = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{n!}$ jest więc asymptotycznie równoważny z ciągiem o wyrazach $\frac{n}{e}$, czyli iloraz tych 2 ciągów zmierza do 1.

Przykład Zbadajmy, dla jakich $a > 0$ kryterium d'Alemberta zagwarantuje zbieżność szeregu $\sum a_n$, gdzie $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (a^n a n! (n+1) n^n) : (a^n n! (n+1)^n (n+1)) = a \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n}.$$

Granica tego ciągu jest $\frac{a}{e}$, więc dla $0 < a < e$ mamy szereg zbieżny, a dla $a > e$ -rozbieżny. Gdy $a = e$, to wzór Stirlinga pokazuje, że wówczas $a_n > \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$ (rozbieżność). W tym przypadku kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga ($g = 1$), podobnie jak kryterium Cauchy'ego.

Parę dalszych przykładów, w których warto stosować kryterium d'Alemberta: $\sum \frac{n^n}{(3n)!}$ (tu $g = 0$), $\sum \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ (tu $g = (\frac{e}{2})^2 > 1$), $\sum \frac{n^n}{n!(e+i)^n}$ (tu i oznacza jednostkę urojoną, $g = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1$.) Kryterium Cauchy'ego możemy stosować np. dla $\sum \frac{n}{6^n} (3+4i)^n$ (tu $\gamma = \frac{5}{6}$), dla $\sum \frac{\ln n}{2^n}$ (tu $\gamma = \frac{1}{2}$), dla $\sum \frac{n^3 3^n}{2^n + 4^n}$ (tu $\gamma = \frac{3}{4}$).