

### 3 Szeregi funkcyjne

**Definicja.** Szeregiem funkcyjnym (w zbiorze  $\Delta$ ) nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \quad (1)$$

o wyrazach, które są funkcjami  $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  (lub  $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ). W myśl definicji szeregów formalnych, szeregiem funkcyjnym nazywamy ciąg funkcji będących k-tymi sumami częściowymi, czyli ciąg funkcji  $S_k(t) = \sum_{n=0}^k f_n(t)$ .

Zbieżność szeregu do sumy  $S$  (która też jest funkcją) oznacza, że

$$S = \lim S_k.$$

Możemy więc mówić o zbieżnościach: punktowej, jednostajnej, lub w normie całkowitej  $\|\cdot\|_p$ . Obszarem zbieżności dla szeregu (1) nazywamy zbiór

$$\{t \in \Delta : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \text{ jest zbieżny}\}. \quad (2)$$

W warunku (2) mamy więc do czynienia ze zbieżnością punktową. Na przykład, obszarem zbieżności dla szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  zmiennej zespolonej  $z$  (tu  $\Delta = \mathbb{C}$ ) jest otwarte koło o promieniu 1 i środku w punkcie zero w  $\mathbb{C}$ .

Ponieważ, jak już wiemy, zbieżność jednostajna na danym zbiorze  $E$  jest równoważna warunkowi jednostajnemu Cauchy'ego na tym  $E$  -który z kolei można opisać używając normy supremowej  $\|\cdot\|_E$ , dla szeregu (1) ta zbieżność oznacza, że normy  $\|S_k - S_m\|_E$  powinny być dowolnie małe dla  $m, k$  dostatecznie dużych. Można przy tym przyjąć, że  $m < k$ , a nawet zastąpić  $m$  przez  $m-1$ , bo  $S_k(t) - S_{m-1}(t) = \sum_{n=m}^k f_n(t)$ , zaś (w zapisie bezargumentowym)  $S_k - S_m = \sum_{n=m+1}^k f_n$ , co jest nieco mniej wygodnym zakresem sumowania. Otrzymujemy więc

**Twierdzenie.** (WARUNEK CAUCHY'EGO DLA SZEREGÓW) Szereg funkcyjny  $\sum f_n(t)$  jest jednostajnie zbieżny na zbiorze  $E$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \forall k, m \forall t \in E (M < m < k) \Rightarrow \left| \sum_{n=m}^k f_n(t) \right| < \epsilon, \quad (3)$$

co skrótowo można zapisać w postaci  $\left\| \sum_{n=m}^k f_n \right\|_E \rightarrow 0$  przy  $m, k \rightarrow \infty$ .

Wynika stąd następujące, bardzo często stosowane kryterium zbieżności podane już w połowie XIX w. przez Carla Weierstrassa, znane też pod nazwą "M-test Weierstrassa"

**Twierdzenie.** (TEST MAJORANT WEIERSTRASSA) Jeśli istnieją takie stałe  $C_n > 0$ , że  $\forall t \in E |f_n(t)| \leq C_n$  oraz  $\sum C_n < +\infty$ , to szereg funkcyjny  $\sum f_n$  jest jednostajnie zbieżny na zbiorze  $E$ .

Uwaga: Dla szeregów liczbowych o wyrazach nieujemnych (i tylko dla nich) można stosować skrótowy zapis typu  $\sum C_n < +\infty$  dla oznaczenia ich zbieżności.

Na przykład, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \log_e(2 + \cos(n^2 t - 7))$  jest jednostajnie zbieżny na zbiorze  $\mathbb{R}$ , bo  $1 \leq 2 + \cos(n^2 t - 7) \leq 3$ , na przedziale  $[1, 3]$  logarytm jest ograniczony przez  $C = \ln 3$ , zaś szereg liczbowy  $\sum C n e^{-n}$  (liczb stanowiących majoranty) jest zbieżny. Można (przez rozwinięcie w szereg Taylora) nadać sens wartości funkcjom  $\cos z, \sin z, \ln z$  dla zmiennych zespolonych:  $z \in \mathbb{C}$ , ale już nie możemy twierdzić, że  $|\cos z| \leq 1$ , co wykorzystywaliśmy w naszym oszacowaniu gdy  $t \in \mathbb{R}$ . Wystąpią też istotne problemy z określeniem, w jakiej

dziedzinie zespolonej możemy określić logarytm (funkcja wykładnicza nie jest injekcją na swojej dziedzinie:  $\mathbb{C}$ , jest nawet okresowa o okresie  $2\pi i$ ). Natomiast  $|e^z|$  jest równy  $e^{\Re z}$ , gdzie  $\Re z$ , to część rzeczywista liczby zespolonej  $z$ .

Są szeregi zbieżne jednostajnie (np. na zbiorze  $E = \mathbb{R}$ ), dla których nie da się zastosować M-testu. Na przykład, gdy  $f_n(t) = \frac{1}{n+1}$  dla  $t \in [n, n+1)$  oraz  $f_n(t) = 0$  dla pozostałych  $t \in \mathbb{R}$ , to  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n+1}$ , zaś  $S_k(t)$  jest funkcją schodkową równą zero dla  $t > k$ , zaś  $S(t)$  jest funkcją schodkową z nieskończoną ilością schodków, równą  $\frac{1}{n+1}$  gdy  $t \in [n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Łatwo sprawdzić, że różnicę  $S - S_k$  otrzymamy zastępując w przedziale  $[0, k+1)$  wartości  $S$  przez zero, pozostawiając dalsze wartości bez zmian, stąd  $\|S - S_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$  przy  $k \rightarrow \infty$ . Oczywiście, w teście Weierstrassa im mniejsze majoranty  $C_n$  weźmiemy, tym większe są szanse na zbieżność szeregu  $\sum C_n$ . Ale zawsze musi być  $C_n \geq \|f_n\|_E$ . W naszym przypadku każdy szereg majorant będzie rozbieżny! Zaletą M-testu jest to, że nie musimy wyliczać norm  $\|f_n\|_E$ , co bywa trudne, wystarczy sprytnie te normy oszacować.

Najważniejszy typ szeregu, dla którego działa M-test, to tzw. szereg potęgowy (a jego najważniejszym przykładem jest szereg Taylora):

## 4 Szeregi potęgowe. Obszar zbieżności

**Definicja.** Szereg funkcyjny  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  zmiennej (rzeczywistej, lub zespolonej)  $z$ , gdzie  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$  dla pewnych  $a_n \in \mathbb{C}$ , nazywamy **szeregiem potęgowym o współczynnikach  $a_n$  i o środku  $z_0$** .

Należy podkreślić, że  $f_0$  jest tu funkcją stałą, równą  $a_0$ . Na przykład, dla  $z_0 = 0$ , gdy  $a_n = a$ ,  $a \neq 0$  jest ciągiem stałym, mamy szereg geometryczny  $\sum az^n$  o ilorazie  $z$ , zbieżny dla  $|z| < 1$  (o sumie  $\frac{a}{1-z}$ ) i rozbieżny dla  $|z| \geq 1$ . Obszar zbieżności (czyli takich punktów  $z$ , dla których  $\sum f_n(z)$  jest zbieżny) jest więc w tym przypadku kołem otwartym o promieniu 1 na płaszczyźnie zespolonej (o środku w  $z_0$ ).

Jak się okaże, (z dokładnością do pewnych punktów na brzegu), *obszar zbieżności danego szeregu potęgowego* - zawsze będzie kołem o pewnym promieniu  $R$  i o środku w  $z_0$ . Innymi słowy, obszar zbieżności tego szeregu różni się od koła o promieniu  $R$  co najwyżej o pewien podzbiór zbioru  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ . Przyjmujemy tu konwencję, w myśl której takie koło dla  $R = 0$  jest równe  $\{z_0\}$  (wtedy obszar zbieżności redukuje się do tego punktu), zaś dla  $R = +\infty$ , kołem o nieskończenie dużym promieniu jest cała płaszczyzna zespolona  $\mathbb{C}$ .

**Twierdzenie 1** Dla danego szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  istnieje taka liczba  $R \in [0, +\infty]$  (zwana **promieniem zbieżności** tego szeregu), że

- dla  $z \in \mathbb{C}$  takich, że  $|z - z_0| < R$  szereg jest zbieżny;
- dla  $|z - z_0| > R$  szereg nasz jest rozbieżny.

Ponadto gdy  $R > 0$ , to w każdym kole  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ , gdzie  $0 < r < R$  zbieżność szeregu jest jednostajna wraz z pochodnymi dowolnego rzędu. Jeśli istnieje któraś z granic:  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  lub  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , to  $R = \frac{1}{g}$  (odpowiednio  $R = \frac{1}{\gamma}$ ). Tu przyjmujemy  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

Uwaga: Naśladowując dowód kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu, można wykazać, że jeśli tylko istnieje powyższa granica  $g$ , to również istnieje druga z granic:  $\gamma$  i wówczas  $\gamma = g$ . Wynika stąd np., że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ . Promieniem zbieżności szeregu  $\sum n!z^n$  jest więc 0, zaś promieniem zbieżności  $\sum \frac{z^n}{n!} = e^z$  jest  $+\infty$ , czyli ten ostatni szereg jest zbieżny dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ .

Dla większości ciągów żadna z granic:  $\gamma, g$  nie istnieje. Można wykazać, że w takiej sytuacji wystarczy zastąpić  $\gamma$  przez największą z granic podciągów zbieżnych ciągu  $\sqrt[n]{|a_n|}$ , tak zwaną *granicę górną* tego ciągu, oznaczaną symbolem  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Jest to największa spośród liczb  $\gamma$  o tej własności, że

$$\gamma_1 < \gamma \Rightarrow (\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1 \quad \text{dla nieskończenie wielu } n).$$

Granica górna jest też równa granicy ciągu monotonicznego  $(b_n)$ , gdzie  $b_n := \sup\{\sqrt[n]{|a_j|} : j \geq n\} \geq b_{n+1}$ .

W każdym przypadku, jeśli  $\gamma_2 > \gamma$ , to jedynie dla skończonego wielu  $n$  może być  $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_2$ , czyli wówczas  $|a_n| \leq \gamma_2^n$  dla  $n$  dostatecznie dużych. Jeśli  $|z - z_0| \leq r$ , to  $r\gamma < 1$ , więc dla pewnego  $\gamma_2 > \gamma$  jest  $q := r\gamma_2 < 1$ .

Wówczas dla dostatecznie dużych  $n$  mamy oszacowanie (jednostajne w kole  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ) postaci  $|a_n(z - z_0)^n| \leq q^n$ . Jest to oszacowanie normy supremowej po tym kole dla funkcji  $f_n(z) := a_n(z - z_0)^n$ . Pochodną z tej funkcji jest  $f'_n(z) = na_n(z - z_0)^{n-1}$ , którą możemy oszacować przez  $nr^{-1}q^n$  (korzystamy tu z faktu, że funkcja  $|f'_n|$  osiąga maksimum w kole  $\{z : |z - z_0| \leq r\}$  na jego brzegu, gdzie  $|z - z_0| = r$ ). Analogiczne oszacowania supremowe dla pochodnych wyższych rzędów -zawsze dają majoranty sumowalne. Zbieżność (jednostajna wraz z pochodnymi) wynika więc z  $M$ -testu Weierstrassa. Podobnie wykazuje się rozbieżność gdy  $|z - z_0| > R$  -wówczas dla pewnego  $\gamma_1 < \gamma$  jest  $\gamma_1|z - z_0| > 1$  i z oszacowania  $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1$  dla nieskończonego wielu  $n$  otrzymamy zaprzeczenie warunku koniecznego zbieżności:  $|a_n(z - z_0)^n| > 1$  dla nieskończonego wielu  $n$ .

Jeśli ograniczamy się do  $z, z_0$  rzeczywistych, mówimy o przedziale zbieżności szeregu potęgowego  $\sum a_n(x - x_0)^n$ , dla  $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$  mamy zbieżność tego szeregu dla  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , rozbieżność dla  $|x - x_0| > R$ . Czy jest to szereg zbieżny, czy nie w końcach tego przedziału -zależy od samego ciągu  $a_n$ . Dla uproszczenia, niech  $x_0 = 0, R = 1$ . Gdy  $\sum a_n$  jest bezwzględnie zbieżny, zaś dla  $|x| > 1$  mamy rozbieżność  $\sum a_n x^n$ , to przedziałem zbieżności jest  $[-1, 1]$ . Dla  $a_n = \frac{1}{n}, a_0 = 0$  przedziałem zbieżności  $\frac{1}{n}x^n$  jest  $[-1, 1)$ , bo dla  $x = 1$  sumą jest  $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ . Dla  $x = -1$  mamy naprzemienny szereg zbieżny. Podobnie, dla  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  -przedziałem zbieżności jest  $(-1, 1]$ . Można wykazać, że można tak dobrać  $a_n$ , by dla żadnej liczby zespolonej  $z$  o module 1 szereg  $\sum a_n z^n$  nie był zbieżny, a obszarem zbieżności -było koło otwarte jednostkowe.

Można wykazać następujące **Twierdzenie Abela**: Jeżeli szereg potęgowy o środku  $x_0$  i promieniu zbieżności  $R \in (0, +\infty)$  jest zbieżny w którymś z punktów  $x_0 \pm R$  (na krańcu przedziału zbieżności), to jego suma jest funkcją ciągłą w tym punkcie, szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku łączącym ten punkt z punktem  $x_0$ .

Jako zastosowanie, możemy wykazać, że  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ . Promień zbieżności szeregu potęgowego geometrycznego  $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$  wynosi 1, więc w przedziałach  $[-r, r]$  dla  $r < 1$  jego zbieżność jest jednostajna i możemy tam całkować szereg wyraz po wyrazie, otrzymując dla  $0 < x < 1$  rozwinięcie  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ . Z twierdzenia Abela wyniknie, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

co daje naszą równość.

Szereg potęgowy  $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$  o sumie  $\frac{1}{1+x^2}$  możemy całkować stronami na przedziałach  $[0, x]$  dla  $|x| < 1$ , otrzymując rozwinięcie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctg x$ . Dzięki twierdzeniu Abela ten wzór możemy też stosować w punkcie  $x = 1$ , otrzymując ciekawe przedstawienie liczby  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 4.1 Szereg Taylora i Maclaurina

Jak widać, niektóre funkcje można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego stosując całkowanie lub różniczkowanie szeregu potęgowego geometrycznego  $\sum x^n$  (z ewentualnymi podstawieniami w miejsce zmiennej  $x$  jakiegoś prostego wielomianu). Ale w ogólnym przypadku niełatwo jest znaleźć tę metodą współczynniki rozwinięcia. Na szczęście, jest inny sposób: Przypuśćmy, że promień zbieżności dla szeregu  $s(x) := \sum a_n(x - x_0)^n$  jest dodatni. Podstawianie wartości  $x = x_0$  do tego rozwinięcia funkcji  $s(x)$  a następnie do jej pochodnych

rzędu  $k$  daje równości:  $s(x_0) = a_0, s'(x_0) = a_1, \dots, s^{(k)}(x_0) = k!a_k$ , gdyż w takim rozwinięciu wszystkie -z wyjątkiem jednego (dla  $n = k$ ) składniki zerują się w punkcie  $x_0$ . Jeśli więc tylko  $f(x)$  jest sumą typu  $s(x)$  -czyli sumą jakiegoś szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  do  $f$ , to musi już być  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ . Szereg potęgowy o takich współczynnikach nazwiemy *szeregiem Taylora* w punkcie  $x_0$  dla funkcji  $f$ . W przypadku  $x_0 = 0$  szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Jeśli tylko 0 należy do wnętrza dziedziny  $f$ , to najprostszą i najczęściej używaną jest właśnie taka postać. Rzecz jasna, wymaga to znajomości poszczególnych pochodnych w punkcie 0. Dla niektórych funkcji są na to proste wzory: np. dla  $f(x) = e^x$  wszystkie pochodne są równe  $e^x$ , a w zerze przyjmują wartość 1. Dla funkcji sinus pochodne rzędu  $k$  w zerze zerują się dla  $k$  parzystych i są równe  $(-1)^m$  dla  $k = 2m + 1$ . Podobnie,  $\cos^{(k)}(0) = (-1)^j$  gdy  $k = 2j, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , zerując się dla  $k$  nieparzystych. Tu promieniem zbieżności jest  $+\infty$ . Dla funkcji  $\ln(1+x)$  promień zbieżności szeregu Maclaurina wynosi 1. Można wykazać, że wszystkie te szeregi mają sumy równe rozwijanym funkcjom, choć niełatwy dowód pominiemy. Można więc zapisać:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Teraz wyjaśnię, dlaczego wprowadziłem na początku symbol  $S(x)$  dla sumy szeregu potęgowego. Może się zdarzyć, że promień zbieżności szeregu Taylora wynosi  $+\infty$ , lecz mimo to  $f(x) \neq S(x)$  dla  $x \neq x_0$ .

**Przykład** Tak jest w przypadku funkcji  $\phi(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$  dla  $x \neq 0$ , oraz  $\phi(0) := 0$ . Wszystkie jej pochodne w punkcie 0 istnieją (na wykładzie wykazałem to dla  $k = 1$ , lecz są równe zero, więc szereg Maclaurina dla  $\phi$  ma same zerowe współczynniki,  $s(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Natomiast  $\phi(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ .

Nasuwa się pytanie: „kiedy jest źle, a kiedy dobrze” w sensie równości pomiędzy funkcją klasy  $C^\infty$  i jej sumą szeregu Taylora? Odpowiedź wymaga osobnej teorii, podamy jedynie definicję:

**Definicja** Mówimy, że **funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest analityczna** (dokładniej,  $\mathbb{R}$ -analityczna) na zbiorze otwartym  $D \subset \mathbb{R}$ , jeżeli dowolny punkt  $x_0 \in D$  ma otoczenie, w którym  $f$  jest równa sumie jakiegoś szeregu potęgowego. (Jak już wiemy, ten szereg musi być wówczas jej szeregiem Taylora.)

Ponieważ szereg potęgowy (mając wówczas dodatni promień zbieżności  $R$ ) jest zbieżny także poza osią rzeczywistą, dla  $z \in \mathbb{C}$  leżących w kole  $|z - x_0| < R$ , funkcje analityczne można przedłużyć na pewne otoczenie  $\Omega$  zbioru  $D$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Gdy  $R = \infty$ , (np. dla  $\exp, \sin, \cos$ , sumując szereg Taylora otrzymamy przedłużenie tych funkcji dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ . Porównując szeregi Maclaurina dla funkcji  $\exp(ix), x \in \mathbb{R}$  z rozwinięciami funkcji trygonometrycznych, Euler doszedł do swego słynnego wzoru:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Funkcje analityczne na otwartych podzbiorach  $\Omega$  płaszczyzny zespolonej definiujemy analogicznie -jako równe sumie szeregów potęgowych w pewnych otoczeniach (w  $\mathbb{C}$ ) każdego punktu ze zbioru  $\Omega$ . Aby odróżniać te funkcje, zmienna w przypadku rzeczywistym oznaczamy symbolem  $x, t$  lub  $\phi$ , zaś w przypadku zespolonym -jednym z symboli:  $z, w, \lambda, \zeta$ . Można wykazać, że poza przypadkiem funkcji stałych, funkcja analityczna  $f(z)$  nie może przyjmować wyłącznie wartości rzeczywistych w otoczeniu (zespolonym) żadnego punktu.