Analiza matematyczna na kierunku "Elektrotechnika"

15 października 2025

1 Uzupełnienia, notatki do pierwszych wykładów

Ten tekst powstał podczas zdalnego nauczania w roku 2020, ale może być pomocny w sytuacji, gdy ktoś nie zdążył czegoś zanotować na wykładzie, lub chce sobie jakieś pojęcia przypomnieć. Jest to nieco porządniej napisane, niż na tablicy.

Literatura:

W. Żakowski, W. Kołodziej "Matematyka Cz.I" WNT
R. Leitner, "Zarys matematyki wyższej dla studentów , Cz. I" WNT
J. Pietraszko, "Matematyka: teoria, przykłady, zadania" Oficyna Wyd. Politechn. Wrocławskiej
R.Leitner, W. Matuszewski, Z. Rojek, "Zadania z matematyki wyższej cz. I"
M. Gewert, Z. Skoczylas, "Analiza matematyczna 1 Przykłady i zadania" Oficyna Wyd. GiS, Wrocław
F. Leja, "Rachunek różniczkowy i całkowy" PWN
J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT
W.Krysicki, L. Włodarski, "Analiza matematyczna w zadaniach, Cz. I", PWN

Kurs analizy dla studentów informatyki UW opracowany (szczególnie starannie) przez pracowników UJ pod adresem:

`http://osilek.mimuw.edu.pl/index.php?title=Analiza_matematyczna_1`

Portal matematyka.pl itd.

Najważniejsze źródło: **porządne przemyślenie i zrozumienie notatek z wykładu, przerobienie samodzielne lub na ćwiczeniach pewnej ilości zadań**.

1.1 Podstawowe oznaczenia

Zbiory liczb: $\mathbb{N}$ (naturalnych, bez zera), $\mathbb{Z}$ (całkowitych), $\mathbb{Z}_+$ (całkowitych nieujemnych), $\mathbb{Q}$ (wymiernych), $\mathbb{R}$ (rzeczywistych), $\mathbb{C}$ (zespolonych). Symbol $\in$ -np. w wyrażeniu $k \in \mathbb{N}$ oznacza "k jest elementem zbioru $\mathbb{N}$", co odczytujemy też "k należy do $\mathbb{N}$". Symbol $b \notin A$ oznacza, że "b nie należy do A". Dalsze oznaczenia zbiorów liczbowych (np. przedziały na osi liczbowej) omówię później.

1.2 Symbole logiki matematycznej

Precyzję rozumowań, rzecz kluczową przy studiowaniu i późniejszym stosowaniu matematyki – zapewnia niezwykle precyzyjny język. Język potoczny dopuszcza pewne dwuznaczności, w przypadku skomplikowanych treści matematycznych (jak definicje granic, pochodnych) ich zapis powoduje powstawanie zbyt złożonych, trudnych do zrozumienia zdań.

Znacznym ułatwieniem, z którego i my będziemy korzystali, jest język logiki matematycznej. W późniejszych wykładach będziemy starali się nie nadużywać symboli spójników logicznych, czy kwantyfikatorów, ale powinniśmy patrzeć na wypowiedzi matematyczne poprzez ich strukturę, umiejąc przejść na symboliczną wersję, by niemal automatycznie korzystać z udogodnień, jakie daje nam "rachunek zdań", czyli podstawowe prawa logiki matematycznej. Więc zacznijmy:

Zdania logiczne (oznaczane literami typu p, q, r, a, b) -to wyrażenia, którym przypisać można jedną z wartości logicznych: *prawda* (=wartość 1, oznaczana tu przez literę ν -np. $\nu(p) = 1$) lub *fałsz* (wartość 0). Zdania łączymy spójnikami logicznymi, tworząc nowe zdania o następującej wartości:

- negacja: $\neg p$, lub $\sim p$ [wartość przeciwna: $\nu(\neg p) = 1 - \nu(p)$]
- alternatywa: $p \vee q$, gdzie $\nu(p \vee q) = \max(\nu(p), \nu(q))$
- koniunkcja: $p \wedge q$, gdzie $\nu(p \wedge q) = \min(\nu(p), \nu(q)) = \nu(p) \cdot \nu(q)$
- implikacja: $p \Rightarrow q$, gdzie $\nu(p \Rightarrow q) = \max(1 - \nu(p), \nu(q))$
- równoważność $p \Leftrightarrow q$, [$\nu(p \Leftrightarrow q) = 1$ dokładnie wtedy, gdy $\nu(p) = \nu(q)$].

Przykładowo: zdanie prawdziwe, to np. zdanie: "Liczba 35 jest podzielna przez 7.", czy (mniej oczywiste: "Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych")

Zania fałszywe, to np. "$5 < 3$", "Każdy wielomian o współczynnikach wymiernych ma pierwiastek wymierny". Jednak wiele wypowiedzi uznawanych w języku potocznym za zdania -zdaniami logicznymi nie jest. Przykładem jest zdanie pytające: "Czy długo jeszcze będą tak nudne przykłady?", albo: "Może poszlibyśmy jutro do kina?".

Tautologia, to zdanie złożone prawdziwe przy dowolnych wartościach logicznych występujących w nim "symboli zdań" -np. $\nu(p \vee (\sim p)) = 1$ zarówno przy $\nu(p) = 0$, jak i wtedy, gdy $\nu(p) = 1$. Więc $p \vee (\sim p)$ jest tautologią (zwaną *prawem wyłączonego środka*).

Gdy występują 2 symbole: p,q, sprawdzić musimy 4 możliwe układy wartości logicznych: pary $(\nu(p), \nu(q))$ mogą być równe jednej z par: (1,1), (1,0), (0,1), (0,0). Dla 3 symboli będzie $2^3 = 8$ możliwych ewaluacji trójek p, q, r do sprawdzenia (używamy tabelek). Ważne przykłady tautologii znadziecie Państwo w większości zbiorów zadań. Przykładowo, zachodzi następująca "rozdzielność alternatywy względem koniunkcji":

$$[(p_1 \vee p_2) \wedge q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q)].$$

Mamy też "rozdzielność koniunkcji wzgl. alternatywy":

$$[(p_1 \wedge p_2) \vee q] \Leftrightarrow [(p_1 \vee q) \wedge (p_2 \vee q)].$$

Wyrażenia zawierające zmienne (litery typu $n, m, x, y, ...$), które po wstawieniu za nie konkretnych obiektów danej torii (np. liczb, punktów, zbiorów) stają się zdaniami -nazwiemy

funkcjami zdaniowymi, bądź *formami zdaniowymi*.

Formy zdaniowe mogą być poprzedzone kwantyfikatorami odnoszącymi się do danej zmiennej z formy -opisanej jako symbol pod kwantyfikatorem. **Zmienna z formy zdaniowej zostaje "związana" przez dany kwantyfikator i jeśli jest to jedyna zmienna- otrzymujemy zdanie.** Są 2 *kwantyfikatory: ogólny* ("dla każdego") -oznaczany $\forall$ oraz *szczegółowy* ("istnieje"), ozn. $\exists$. Tak więc zdanie $\forall_x\ x^2 + 1 > 0$, jeśli dotyczy liczb rzeczywistych, jest prawdziwe. Ale kto poznał liczby zespolone - ten wie, że dla nich już istnieją takie x, dla których $x^2 = -4$ -zdanie przestaje być prawdziwe. Kwantyfikator $\forall$ traktowany jest jako "domyślny" i w zapisie często jest opuszczany. Podobnie, zamiast symbolu koniunkcji, zazwyczaj w zapisie wstawia się przecinek, alternatywę opisuje się słowem "lub". Kwantyfikator $\exists_x$ zastępujemy słowami typu: "dla pewnego x..."lub "istnieje takie x, że...".

Wygodnie jest zdefiniować "*kwantyfikatory z ograniczonym zakresem*"

np. $\forall_{x\in\mathbb{N}}\ x > \frac{1}{2}$, lub $\exists_{x<0}\ 4^x = \frac{1}{2}$. Definiować je można przez równoważności:

$$\forall_{A(x)}\, B(x) \Leftrightarrow \forall_x [A(x) \Rightarrow B(x)],$$
$$\exists_{A(x)}\, B(x) \Leftrightarrow \exists_x [A(x) \wedge B(x)].$$

Przykładowe zadania 1. Sprawdzić, że tautologiami są następujące zdania:
$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ ("zasada podwójnej negacji")
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
$[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ ("prawo de Morgana")
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ("zasada kontrapozycji")
$[(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)]$
$[(p_1 \wedge_2) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \Rightarrow q) \vee (p_2 \Rightarrow q)]$
$[p \Rightarrow (q_1 \vee q_2)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q_1) \vee (p \Rightarrow q_2)]$

Wyrażenie z kwantyfikatorem $\forall_{A(x)}\, B(x)$ jest prawdziwe, gdy dowolny x spełniający warunek $A(x)$ spełnia też warunek $B(x)$

-np. $\forall_{t>1}\, t^2 > t$ (czyli: "dla każdej liczby rzeczywistej t takiej, że $t > 1$ mamy $t^2 > t$"). Wyrażenie z kwantyfikatorem $\exists_x$ będzie prawdziwe, gdy znajdzie się przynajmniej jeden x spełniający warunek poprzedzony tym kwantyfikatorem. Mamy następujące *prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:*

$$\sim [\forall_x\, P(x)] \Leftrightarrow \exists_x\, [\sim P(x)], \qquad \sim [\exists_x\, Q(x)] \Leftrightarrow \forall_x\, [\sim Q(x)].$$

Dla konstrukcji kresów górnych istotna będzie następująca reguła:

$$[\big(\exists_x P(x)\big) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\forall_x \big(P(x) \Rightarrow Q\big)]. \tag{1}$$

Przykładowe zadania 2. Przy użyciu poznanych wcześniej reguł proszę sprawdzić, czemu jest równoważna negacja kwantyfikatora $\exists_{A(x)} B(x)$.

A co będzie negacją kwantyfikatora $\forall_{P(x)}\, Q(x)$?

Dla form zdaniowych, w których zmienną jest liczba naturalna n obowiązuje *zasada indukcji matematycznej*:

$$\big(P(1) \wedge [P(n) \Rightarrow P(n+1)]\big) \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\, P(n).$$

Przykładowe zadania 3. Stosując tę zasadę wykazać następujące tezy:
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
$\forall_{x>-1}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ("nierówność Bernoulli'ego"),
$[a_j > 0 (\forall_{j=1,\ldots,n}) \wedge a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1] \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$,
$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$,
Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $13^n - 1$ jest podzielna przez 6,
Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Innym często stosowanym sposobem dowodzenia twierdzeń jest tzw. *metoda dowodzenia nie wprost*. Dołączamy do założeń zaprzeczenie tezy, a dowód będzie zakończony, gdy na podstawie tych przesłanek wywnioskujemy sprzeczność -czyli np. zdanie typu $p \wedge (\sim p)$. Na wykładzie pokażę, jak w ten sposób wykazać, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

1.3 Zbiory

W teorii mnogości przyjmuje się, że pojęcia: zbioru, należenia elementu do zbioru (na przykład, $a \in A$) -są to pojęcia pierwotne. Negację warunku $a \in A$ zapisujemy symbolem $a \notin A$. Wyróżniamy zbiór pusty, oznaczany symbolem $\emptyset$, do którego żaden element nie należy, zbiór jednoelementowy, którego jedynym elementem jest a oznaczamy symbolem $\{a\}$. Zbiór, do którego należą jedynie elementy $a_1, \ldots, a_n$ zapisujemy jako $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Jeden z aksjomatów mówi, że dwa dane zbiory (powiedzmy A i B) są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy, czyli gdy zachodzi równoważność $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. W szczególności, dla zbiorów dwuelementowych jest $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ponadto $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Mówimy, że *zbiór B jest podzbiorem zbioru A*, co zapisujemy symbolem $B \subset A$, lub czasem $A \supset B$, jeśli zachodzi implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$, czyli gdy $\forall_{x \in B}\ x \in A$.

Jeśli E jest zbiorem, zaś $P(x)$ jest formą zdaniową określoną dla dowolnych elementów x ze zbioru E, to zbiorem jest też ogół tych x będących elementami zbioru E, dla których zdanie P(x) jest prawdziwe. Taki zbiór "wyróżniony przez formę $P(\cdot)$ zapisujemy w postaci $\{x \in E : P(x)\}$. Na przykład, przedział domknięty $[1, 5]$ na osi liczbowej $\mathbb{R}$, to zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 5 \wedge x \geqslant 1\}$.

Różncę mnogościową zbiorów A i B definiujemy jako zbiór

$$A \setminus B := \{x \in A :\ x \notin B\}.$$

Nie istnieje zbiór Ω wszystkich zbiorów, wówczas zbiorem powinien być $M = \{E \in \Omega : E \notin E\}$ dla którego, wbrew zasadzie wyłączonego środka, każda z (jedynych) dwu możliwości: $M \in M$ oraz $M \notin M$ prowadzi do sprzeczności! (Paradoks ten odkryty został przez B. Russela na początku XX wieku.)

Ta trudność powoduje potrzebę zakładania w formie aksjomatów istnienia pewnych zbiorów wynikłych z operacji (np. sumy mnogościowej) na pewnych zbiorach (lub na rodzinach zbiorów, tzn. na zbiorach, których elementami są pewne inne zbiory). Przykładem jest operacja tworzenia zbioru potęgowego (ozn. 2^E, lub $\mathcal{P}(E)$), którego (jedynymi) elementami są wszystkie możliwe podzbiory zbioru E.

Możemy zdefiniować przecięcie (część wspólną) zbiorów A i B jako zbiór $A \cap B = \{x \in A :\ x \in B\}$. Gdy A_n są zbiorami dla $n \in \mathbb{N}$, to uogólnionym iloczynem tych zbiorów nazywamy zbiór $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ozn. też $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zdefiniowany jako $\{x \in A_1 : \forall_{n \in \mathbb{N}}\, x \in A_n\}$. W tej definicji wyróżniliśmy go jako pewien podzbiór w zbiorze A_1, ale mogliśmy równie dobrze użyć innego ze zbiorów A_n. Gorzej jest z definicją sumy mnogościowej -nie mamy na ogół zbioru, w którym to się zawiera i trzeba zagwarantować aksjomatem istnienie zbioru (np. $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ takiego, że $x \in E \Leftrightarrow (\exists_{k \in \mathbb{N}}\, x \in E_k)$). Gdy wszystkie zbiory E_n zawarte są w pewnym zbiorze (np, w zbiorze $\mathbb{R}$), nie musimy używać aksjomatu -bo wówczas nasz E jest zbiorem $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x \in A_n\}$.

Przykład Wyznaczmy sumę ciągu przedziałów domkniętych $D_n = [\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$. Niech $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Jeśli $x \in B$, to dla pewnego "wskaźnika" $m \in \mathbb{N}$ jest $x \in D_m$, czyli $\frac{1}{m} \leqslant x \leqslant 2 - \frac{1}{m}$. Stąd $0 < x < 2$ i w takim razie $B \subset (0, 2)$. Wykażemy, że faktycznie zbiór B jest równy przedziałowi otwartemu $(0, 2)$. Wystarczy sprawdzić zawieranie się tego przedziału w B, czyli wykazać, że dla każdej (dowolnie ustalonej) liczby $y \in (0, 2)$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $y \in D_k$. Ponieważ w szczególności mamy $y > 0$, liczba odwrotna: $\frac{1}{y}$ jest skończona i istnieją liczby naturalne k_1 spełniające warunek $\frac{1}{y} < k_1$. Wynika stąd, że $\frac{1}{k_1} < y$. Podobnie, istnieją liczby k_2 większe od odwrotności liczby (dodatniej) $2 - y$ i dla nich $\frac{1}{k_2} < 2 - y$, zaś $2 - \frac{1}{k_2} > 2 - (2 - y) = y$. Jeśli równocześnie mamy $k \geqslant k_1$ oraz $k \geqslant k_2$ -a takie $k \in \mathbb{N}$ istnieją, np. $k = \max\{k_1, k_2\}$, to w szczególności $y \in [\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k}] = D_k$. Skoro znaleźliśmy takie $k \in \mathbb{N}$, że $y \in D_k$, to w myśl definicji sumy, mamy $y \in \bigcup_n D_k$, co było do okazania.

Najbardziej ogólna definicja sumy mnogościowej dotyczy sumy dla rodziny zbiorów, czyli takiego zbioru $\mathcal{A}$, którego wszystkie elementy są zbiorami. Mówimy mianowicie, że zbiór (nazwijmy go literą B) jest *sumą rodziny $\mathcal{A}$*, co

oznaczamy symbolem $B = \bigcup \mathcal{A}$, jeżeli spełniony jest warunek:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists_{E \in A} x \in E.$$

Na przykład, dowolny zbiór A jest sumą wszystkich jego podzbiorów jednoelementowych: $A = \bigcup\{\{x\} : x \in A\}$. Zauważmy, że z reguły (1) dla kwantyfikatorów wynika następujące kryterium zawierania sumy mnogościowej dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ przez zadany zbiór E:

$$(\bigcup \mathcal{A} \subset E) \Leftrightarrow (\forall_{X \in \mathcal{A}} X \subset E, \tag{2}$$

czyli $\bigcup \mathcal{A}$ jest najmniejszym spośród zbiorów E zawierających wszystkie elementy tej rodziny zbiorów. Definiujemy też *różnicę mnogościową:* $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}$ dla pary zbiorów. Definiujemy *parę uparządkowaną* $(a; b)$ -gdzie element a nazywamy poprzednikiem, zaś b -następnikiem tej pary, wzorem

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

W większości podręczników oznacza się taką parę symbolem (a, b), ja zamiast przecinka wstawiam średnik, by odróżnić ten obiekt od przedziału otwartego o końcach a oraz b. W odróżnieniu od par nieuporządkowanych, czyli zbiorów $\{a, b\}$ -tu porządek odgrywa rolę i $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$. Iloczyn kartezjański zbiorów A oraz B, oznaczany $A \times B$, to zbiór wszystkich możliwych par $(a; b)$, gdzie $a \in A, b \in B$.

1.4 Relacje, odwzorowania, funkcje

Relacją (binarną, czyli dwuargumentową) między elementami zbiorów A, B nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Mówimy, że relacja R jest *zwrotna*, gdy $A = B$ oraz $\forall_{a \in A}(a; a) \in R\}$. R jest *przechodnia*, gdy

$$[(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R] \Rightarrow (a; c) \in R.$$

Zamiast $(a; b) \in R$ piszemy na ogół aRb. Relację nazwiemy *symetryczną*, gdy $aRb \Rightarrow bRa$. Reklacja jest *antysymetryczna*, gdy $[aRb \wedge bRa] \Rightarrow a = b$.

Relacje różnoważności, to relacje, które równocześnie są zwrotne, symetryczne i przechodnie. Natomiast relacje zwrotne, przechodnie i antysymetryczne nazywamy *relacjami (częściowego) porządku.*

Odwzorowaniem (a w przypadku $Y \subset \mathbb{R}$ *funkcją*) o dziedzinie D, gdzie $D \subset X$ i o wartościach w zbiorze Y nazywamy taką relację $f \subset X \times Y$, dla której $(x; y_1) \in f \wedge (x; y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$ (relacja jednoznaczna), przy czym $D = \{x \in X : \exists y \in Y : (x; y) \in f\}$. Tu zamiast R użyłem symbolu f, a zamiast $(x; y) \in f$ piszemy wówczas $y = f(x)$ oraz $f : D \longrightarrow Y$.

Definiujemy *obraz zbioru $E \subset X$ przez tę funkcję* jako zbiór

$$f[E] = \{y \in Y : \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

Zbiór ten można też zapisać (nieco mniej formalnie) jako $\{f(x) : x \in E\}$. *Przeciwobraz zbioru $B \subset Y$* oznaczany jako $f^{-1}[B]$ definiujemy jako zbór

$$f^{-1}[B] := \{x \in D : f(x) \in B\}.$$

Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazwiemy *odwzorowaniem różnowartościowym* lub *injekcją*, gdy zachodzi implikacja: $[a \in X \wedge b \in X \wedge f(b) = f(a)] \Rightarrow b = a$. Odwzorowaniem *na zbiór Y* lub *surjekcją* nazwiemy f, jeśli $f[X] = Y$, czyli gdy $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\ f(x) = y$. *Bijekcja.* to injekcja, która jest zarazem surjekcją.

Złożeniem odwzorowań $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ nazwiemy odwzorowanie $h : X \to Z$ oznaczane symbolem $g \circ f$, którego wartości określa wzór: $h(x) = g(f(x))$. Jak łatwo się domyśleć, g nazywamy funkcją zewnętrzną (odwzorowaniem zewnętrznym) tego złożenia, zaś f - odwzorowaniem wewnętrznym. Gdy f nie jest określona na całym zbiorze X, tylko na dziedzinie $D(f)$, zaś g -na dziedzinie $D(G)$, to powyższy wzór na złożenie określa odwzorowanie o dziedzinie równej $D(f) \cap f^{-1}[D(g)]$. (Ostatni zbiór jest równy zbiorowi $f^{-1}[D(g)]$.)

Przykładowe zadania 4. Sprawdzić, że dla obrazów mamy relacje:

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B], \qquad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],$$

przy czym ostatnia inkluzja jest równością dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ jedynie w przypadku injekcji. Dla przeciwobrazów mamy już równości $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ i analogiczną -gdy zamienić po obu stronach znak $\cap$ na symbol sumy: $\cup$. Ponadto $f[f^{-1}[A]] \subset A$ oraz $B \subset f^{-1}[f[B]]$. Która z ostatnich inkluzji staje się równością w przypadku injekcji, a która dla surjekcji?

Sposobem na ominięcie problemów związanych z nieinjektywnością jest przejście od odwzorowania $f : X \to Y$ do jego *zawężenia (restrykcji)* $f|_E$ do danego podzbioru E zbioru X (czyli takiego zbioru, że $E \subset X$). Jest to odwzorowanie określone takim samym wzorem, lecz z dziedziną "okrojoną do E". Innymi słowy, definiujemy $f|_E : E \to Y$ wzorem $f|_E(x) = f(x)$ dla $x \in E$. Na przykład, restrykcja funkcji *sinus* do przedziału $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest injekcją i żaden większy przedział nie ma już takiej własności.

Gdy $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem różnowartościowym, na zbiorze $f[X]$ możemy określić odwzorowanie odwrotne f^{-1}. Jest to jedyne odwzorowanie g o dziedzinie równej $f[X]$ i takie, że

$$\forall_{x \in X}\ g(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \forall_{y \in f[X]}\, f(g(y)) = y.$$

Na przykład, dla funkcji $f = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ jej funkcję odwrotną oznaczamy symbolem $\arcsin$. Jest to funkcja określona[1] na przedziale $[-1, 1]$ o wartościach w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dla funkcji $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $h(t) = t^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ injektywność mamy jedynie w przypadku k nieparzystych, zaś dla k parzystych maksymalnym podzbiorem dziedziny, na którym restrykcja $h|_E$ jest injektywna będzie $E = [0, +\infty) = \mathbb{R}_+$, zaś funkcją odwrotną do tej restrykcji jest funkcja "pierwiastek stopnia k", czyli $(h|_{[0,+\infty)})^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$ dla $y \in [0, +\infty)$. Przykładem funkcji, która jest równa funkcji do niej odwrotnej jest funkcja określona wzorem $\phi(t) = \frac{1}{t}$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykładowe zadania 5. Wyznaczyć funkcje odwrotne dla funkcji: L określonej wzorem $L(t) = at + b$ oraz dla funkcji $u(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, jeśli $a, c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$.

Odwzorowanie o dziedzinie D_f, przyjmujące wartości $f(x)$ w zbiorze Y wygodnie jest zapisywać w postaci:

$$D_f \subset X \ni x \mapsto f(x) \in Y \qquad \text{lub} \qquad D_f \ni x \mapsto f(x) \in Y. \tag{3}$$

W takim zapisie najczęściej w miejscu $f(x)$ znajduje się jakiś wzór. Podanie samego wzoru (najczęściej liczbowego) jeszcze nie określa funkcji, bo nie jest podana dziedzina. Domyślnie możemy wówczas jednak przyjmować, że dziedzina jest maksymalna w przypadku $D \subset \mathbb{R}$. Na przykład, dziedziną maksymalną (mówimy też „dziedziną naturalną") dla $g(x) = \sqrt{\sin x}$ jest suma mnogościowa $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$, gdyż jedynie w punktach tego zbioru funkcja *sinus* jest nieujemna, zaś dziedziną naturalną funkcji $\sqrt{x}$ jest $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

1.5 Funkcje odwrotne

Jeśli $R \subset X \times Y$ jest relacją, to zbiór R^{-1} zdefiniowany jako

$$\{(y; x) :\ (x; y) \in R\}$$

jest zawarty w $Y \times X$, jest to więc relacja. Nazywamy R^{-1} *relacją odwrotną do relacji* R. Relacja odwrotna do odwzorowania –czyli do relacji jednoznacznej – na ogół nie jest jednoznaczna. Widać to na przykładzie funkcji potęgowej

[1] Sprawdzenie, że sinus przyjmuje wszystkie wartości z $[0, 1]$ będzie nieco później

o wykładniku parzystym -w najprostszym przypadku -kwadratowej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t^2$. W tym przypadku $f^{-1} = \{(t; \sqrt{t}) : t \geqslant 0\} \cup \{(t; -\sqrt{t}) : t \geqslant 0\}$.

Próba usunięcia tej trudności prowadzi w naturalny sposób do pojęcia *restrykcji (zawężenia)* odwzorowania do zbioru $E \subset D$, oznaczanej symbolem $f|_E$. Dziedziną tej restrykcji jest zbiór E, jej wartości w punktach tego zbioru są takie, jak wartości odwzorowania f Tak więc dla odwzorowania postaci (3) definiujemy $f|_E : E \to Y$ określając $f|_E(x) = f(x)$ dla $x \in E$.

Relacja odwrotna do funkcji $f|_E$ będzie funkcją (relacją jednoznaczną) wtedy i tylko wtedy, gdy f będzie różnowartościowa na zbiorze E, czyli gdy $f|_E$ będzie injekcją. Funkcje: $\sqrt[k]{(x)}$ (gdy $k = 2n$ jest parzyste), arc sin i inne funkcje cyklometryczne definiujemy jako odwrotne do restrykcji funkcji potęgowej (odp. do restrykcji funkcji trygonometrycznych).

Dziedziną funkcji odwrotnej typu $(f|_E)^{-1}$ jest obraz: $f[E]$ zbioru E, czyli zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez f na zbiorze E. Ścisły dowód tego, że dziedziną funkcji pierwiastkowej $\sqrt[2n]{(x)}$ jest cała półoś nieujemna $\mathbb{R}_+$, dziedziną funkcji $\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$ jest przedział $[-1, 1]$ itp. jest dość trudne i dowodu nie podamy na wykładzie, znajdzie się on w notatkach uzupełniających (zostanie umieszczony później, w dalszej części tego pliku) i nie będzie Państwa obowiązywał. Ponieważ, jak wspominałem, jedną z podstawowych zasad w matematyce jest sprawdzanie, czy rzeczywiście dany obiekt istnieje, zachęcam do prześledzenia tych notatek.

1.6 Oś liczbowa

Ten podrozdział można pominąć, jest on umieszczony, by upewnić się, że np. każdy ciąg niemalejący ograniczony ma granicę.

Zanim przystąpimy do opisu funkcji zmiennej rzeczywistej, podamy podstawowe własności zbioru liczb rzeczywistych.

Za znane przyjmujemy własności zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych odnoszące się do działań dodawania, mnożenia oraz brania liczby odwrotnej zapisywanej jako t^{-1} lub $\frac{1}{t}$, dla $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. (Przypomnijmy na przykład, że dla ułamków $t = \frac{k}{n}, s = \frac{l}{m}$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$ mamy $t + s = \frac{km+ln}{mn}$, zaś $t = s \Leftrightarrow km = ln$, $t < s \Leftrightarrow km < ln$.) Gdy $t \neq s$, to zachodzi dokładnie jedna z dwu możliwości (tzw. *dychotomia*): albo jest $t < s$, albo też $s < t$.

Liczbie wymiernej t można przyporządkować zbiór $t^* = (-\infty, t) \cap \mathbb{Q}$. Odwzorowanie to będzie różnowartościowe (=łatwe ćwiczenie), przy czym $s \leqslant t \Leftrightarrow s^* \subset t^*$.

W pewnym sensie w zbiorze t^* można "zakodować" wszystkie informacje o liczbie wymiernej t. Tą drogą poszedł matematyk niemiecki, Richard Dedekind (1831-1916). Zdefiniował on zbiór liczb rzeczywistych jako zbiór tzw. przekrojów zbioru $\mathbb{Q}$. Definicja ta odzwierciedla własności wyżej określonych zbiorów t^* (będą one nazywane *przekrojami wymiernymi*).

Definicja 1 *Zbiór $A \subset \mathbb{Q}$ nazywamy przekrojem, gdy:*

1. $\emptyset \neq A \wedge A \neq \mathbb{Q}$,
2. *A nie zawiera elementu największego,*
3. $\forall_{s \in \mathbb{Q}}\ (t \in A \wedge s \leqslant t) \Rightarrow s \in A$.

(Niektórzy jako przekrój definiują (w równoważny sposób) parę zbiorów $A, B \subset \mathbb{Q}$, gdzie $B = \mathbb{Q} \setminus A$. Jest to tzw. „klasa górna"). Zakładamy , wtedy, że zbiór A spełnia pierwsze 2 warunki, zaś zamiast warunku 3. zakłada się, że

$$(\alpha \in A \wedge \beta \in B) \Rightarrow \alpha < \beta \quad \text{oraz} \quad A \cup B = \mathbb{Q}.$$

Przekrój nazywa się *wymiernym*, gdy klasa górna (=zbiór $\mathbb{Q} \setminus A$) zawiera element najmniejszy ($t = \min(A)$ -wówczas wykazuje się, że musi być już $A = t^*$).

Pozostałe przekroje wyznaczają liczby *niewymierne*. Można wyobrazić sobie, jak słabo widoczny z daleka jest ludzki włos. Jednak przedziałek na uczesanej głowie już widać wyraźnie. Przekroje Dedekinda są właśnie takimi „prze-

działkami" na zbiorze liczb wymiernych. Dla przykładu, przekrojem wyznaczającym liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ jest $\{t \in \mathbb{Q} : t \leqslant 0 \vee t^2 < 2\}$ Klasą górną jest tu $\{t \in \mathbb{Q} : t > 0 \wedge t^2 > 2\}$.

Można to ująć jeszcze inaczej: aby wyznaczyć dokładnie liczbę rzeczywistą x wystarczy określić, które liczby wymierne są od niej mniejsze (zbiór takich liczb $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha < x$, to będzie klasa dolna), a które liczby $\beta \in \mathbb{Q}$ są większe (dla niewymiernych x te ostatnie tworzą całą klasę górną odpowiadającą liczbie x). Liczby rzeczywiste niewymierne zapisane w układzie dziesiętnym (dokładniej omówimy to później) wymagają użycia nieskończenie wielu cyfr znaczących (różnych od zera) po przecinku. Zapisując liczbę w układzie dziesiętnym musimy jednak pominąć cyfry po przecinku od pewnego miejsca, zależy to od wymaganego poziomu dokładności. Wówczas podamy pewne przybliżenie takiej liczby z niedomiarem, tym lepsze, im więcej cyfr po przecinku uwzględnimy. Czasami, jak w przypadku słynnej liczby π wyrażającej stosunek obwodu okręgu do jego średnicy, duża dokładność wiąże się z chęcią ustanowienia rekordów sprawności obliczeniowej i cierpliwości. Ponieważ liczbę można z dowolnie dużą dokładnością przybliżać przez takie liczby α, które mają jedynie skończenie wiele cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym (tzn. $\exists_{k\in\mathbb{N}}\, 10^k\alpha \in \mathbb{Z}$), moglibyśmy konstruować przekroje ograniczając się do liczb wymiernych "o mianownikach typu 10^k", czyli "dziesiętnie wymiernych". Klasę dolną przekroju moglibyśmy zastąpić przez jej podzbiór złożony z kolejnych przybliżeń dziesiętnych dla x, uwzględniających coraz dalsze liczny po przecinku, ale taka konstrukcja nie jest zbyt wygodna dla celów przedstawionych poniżej, gdzie jednak liczby traktujemy jako "pełne" przekroje (dokładniej, klasy dolne).

W zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich tak zdefiniowanych liczb rzeczywistych nierówność $A \leqslant B$ definiujemy przez warunek

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Działanie dodawania określamy wzorem $A + B = \{\alpha + \beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$. Stosunkowo łatwo zauważyć, że dla $t, s \in \mathbb{Q}$ mamy $s^* + t^* = (s+t)^*$. Podobnie definiujemy iloczyn (na przykład -w przypadku $A \geqslant 0^*, B \geqslant 0^*$ przyjmując $AB = \{\alpha\beta : \alpha \in A \wedge \alpha \geqslant 0, \beta \in B \wedge \beta \geqslant 0\} \cup 0^*$.)

Należy zdefiniować też liczbę przciwną: $-A$ do liczby rzeczywistej A. W przypadku niewymiernym jest to przekrój $\{-s : s \in \mathbb{Q} \setminus A\}$, w przypadku wymiernym trzeba usunąć z tego zbioru jeszcze element największy. (Można podać nieco inną jednolitą definicję przekroju $-A$). W ten sposób zdefiniowane, działania te są zgodne ze wcześniej poznanymi działaniami na liczbach wymiernych.

Relacja porządku w $\mathbb{R}$ jest liniowa, tzn. zachodzi dychotomia: albo $A \leqslant B$, albo $B < A$.

$\mathbb{Q}$ jest *podzbiorem gęstym* w $\mathbb{R}$, tzn. $a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists_{r\in\mathbb{Q}}\, a < r < b$.

Podstawową własność (=ciągłość) zbioru liczb rzeczywistych, która jest w zasadzie głównym celem konstrukcji Dedekinda poznamy w następnym podrozdziale.

1.7 Ograniczenia i kresy, ciągłość osi liczbowej

Ustalmy niepusty podzbiór E zawarty w osi liczbowej $\mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $T \in \mathbb{R}$ jest *ograniczeniem górnym (*lub: *majorantą)* dla zbioru E, gdy $\forall_{a\in E}\, a \leqslant T$. Wówczas każda liczba T_1 większa od T też jest majorantą dla E. Może się zdarzyć, że jakaś majoranta należy również do samego zbioru E -wówczas jest to tak zwany element największy zbioru E, oznaczany jako $\max(E)$. Na przykład, $\max([a, b]) = b$, zaś $\max([a, b))$ nie istnieje. Zbiór nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy ma jakąś majorantę (czyli gdy zbiór majorant nie jest pusty). Analogicznie definiujemy minoranty (=ograniczenia dolne), elementy najmniejsze (ozn. $\min(E)$) i ograniczoność z dołu. Zbiór ograniczony, to zbiór ograniczony równocześnie z dołu i z góry.

Definicja 2 *Kresem górnym (supremum) zbioru E nazywamy najmniejszą z jego majorant. Kresem dolnym (infimum) zbioru E nazywamy największą*

minorantę tego zbioru. Kresy te oznaczamy odpowiednio: $\sup(E)$, $\inf(E)$.

Zauważmy, że $\alpha = \inf(E) \Leftrightarrow$ gdy spełnione są następujące dwa warunki:

- $\forall_{t\in E}\ \alpha \leqslant t$ oraz
- $(\forall_{t\in E}\ x \leqslant t) \Rightarrow x \leqslant \alpha$.

Pierwszy z tych warunków stwierdza, że α jest minorantą, drugi mówi, że wszystkie inne minoranty są mniejsze od α. Inne równoważne sformułowanie (przez kontrapozycję) tego drugiego warunku brzmi:

- $x > \alpha \Rightarrow \exists_{t_0\in E}\, t_0 < x$. ($x$ nie jest minorantą, gdy tylko $x > \alpha$.)

Inny warunek równoważny np. temu, że dana majoranta α zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest jego kresem (tu bedzie $\alpha = \sup A$) jest istnienie ciągu o wyrazach $x_n \in A$ takiego, że $\alpha = \lim x_n$. Wystarczy, by $\alpha - \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \alpha$.

Zastępując $\mathbb{R}$ przez dowolny zbiór z relacją częściowego porządku można podać identyczne definicje (majorant, minorant i kresów). W szczególności, można pytać o kresy w obrębie zbioru liczby wymiernych. Okazuje się, że pewne zbiory ograniczone liczb wymiernych (np. zbiór $A = \{t \in \mathbb{Q} :\ t^2 < 2\}$) nie mają kresów w zbiorze $\mathbb{Q}$. Faktycznie, gdy $y \in \mathbb{Q}$, to jak wykazaliśmy na wykładzie, nie może być $y^2 = 2$. Jeśli $y \in \mathbb{Q}$ jest majorantą dla A, to nie może być $y^2 < 2$. W przeciwnym przypadku znajdziemy odpowiednio duże $n \in \mathbb{N}$ tak, by nadal było $y + \frac{1}{n} \in A$. Faktycznie, $(y + \frac{1}{n})^2 = y^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant y^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}$ Aby ostatnia liczba była mniejsza od 2 wystarczy, by $n > \frac{3}{2-y^2}$. Pozostaje więc ostatnia możliwość, mamy $y^2 > 2$. Teraz podobnie rozumując sprawdzamy, że jednak liczba $z := y - \frac{1}{m}$ dla dostatecznie dużego m również spełnia $z^2 > 2$ oraz z jest majorantą dla A.(Wystarczy, by $y^2 - \frac{2}{m} > 2$.) To przeczy minimalności y pośród wszystkich majorant zbioru A.

O wyjątkowości zbioru $\mathbb{R}$ świadczy następujący rezultat, znany jako **twierdzenie o ciągłości** $\mathbb{R}$: (niezbędne np, dla wykazania, że ciąg rosnący i ograniczony ma granicę)

Twierdzenie 1 *Każdy niepusty i ograniczony z góry (odp. z dołu) zbiór liczb ma w* $\mathbb{R}$ *kres górny (odpowiednio, dolny) .*

Szkic dowodu: Jest to twierdzenie o istnieniu, dowodząc musimy więc wskazać na liczbę rzeczywistą $A \in \mathbb{R}$, która będzie kresem zadanego zbioru $E \subset \mathbb{R}$, o ile $E \neq \emptyset$ oraz E jest ograniczony z góry. Zarówno szukane A, jak i dowolny element $x \in E$ -są to liczby rzeczywiste, czyli przekroje Dedekinda, a więc zbiory. E jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{Q}$. Zdefiniujmy A jako sumę mnogościową rodziny wszystkich zbiorów x takich, że $x \in E$. (Na wykładzie definiowaliśmy sumę rodziny zbiorów, tu mamy $A = \bigcup E$ przypomnijmy, że

$$A = \{t \in \mathbb{Q} :\ \exists_{x\in E}\ t \in x\}.$$

Można łatwo sprawdzić -na przykład, używając tezy (2), że jest to przekrój. Ponieważ $x \subset A$ dla wszystkich $x \in E$, mamy $x \leqslant A$, czyli A jest majorantą dla E. Podobnie, z (2) otrzymujemy minimalność A wśród majorant E. Stąd $A = \sup(E)$ (QED).

1.8 Funkcje ograniczone, monotoniczne, parzyste

Te definicje podam na wykładzie. Np. mówimy, że $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca (silnie), jeśli $(t, s \in D \wedge t < s) \Rightarrow h(t) < h(s)$. Wynika stąd injektywność funkcji f.

Gdy dziedzina $D(f)$ jest symetryczna względem zera, czyli gdy $t \in D(f) \Rightarrow -t \in D(f)$, to f nazywamy funkcją nieparzystą, jeśli $\forall_{t\in D(f)}\ f(-t) = -f(t)$; odpowiednio -parzystą, gdy $f(-t) = f(t)$. Można wykazać, że wielomian postaci $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_k t^k$ jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich liczb nieparzystych $m \in [1, k] \cap \mathbb{N}$ jest $a_m = 0$. Iloczyn dwu funkcji parzystych, lub dwu nieparzystych -jest parzysty, natomiast iloczyn jednej funkcji parzystej i drugiej -nieparzystej jest funkcją nieparzystą. Podobnie jest dla złożeń.

Ograniczoność funkcji na zbiorze E oznacza ograniczoność obrazu zbioru E przez tę funkcję. Jeśli dziedziną funkcji jest zbiór liczb naturalnych, funkcję $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągiem i wartości h w punkcie n, zamiast $h(n)$, zapisujemy jako h_n. Sam ciąg o wyrazach h_n oznaczamy (h_n). Mówimy wówczas o ciągach rosnących (odp. niemalejących, malejących, nierosnących, monotonicznych), gdy odpowiednie własności przysługują im jako funkcjom.

Przykładowe zadania 6. Sprawdzić, czy
(1) ciąg (h_n) jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{n\in\mathbb{N}} h_n \leqslant h_{n+1}$
(2) czy malejący jest każdy z ciągów: $(\frac{n+1}{2^{n+1}}), (\frac{2^n}{n!}), \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}$
(3) złożenie dwu funkcji malejących jest monotoniczne
(4)Funkcja odwrotna do rosnącej jest też rosnąca
Dla f rosnącej i dla $E \subset D(f)$mamy $\max(f[E]) = f(\max(E))$
(5) Podać przykład bijekcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest monotoniczna
(6*)Przypuśćmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca. Na ogół nierówność $f(\sup(E)) \geqslant \sup(f[E])$ może być ostra. Jednak gdy dla pewnego punktu $x \in E$ obraz przez f przedziału o końcach x oraz $\sup(E)$ jest przedziałem, (spróbować) wykazać równość.
(7) Sprawdzić, że $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(8) Dla ciągu o wyrazach $a_n > 0$ niech $E_n = [0, a_n)$. Sprawdzić, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = [0, \alpha)$ dla $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(9) Czy funkcja odwrotna do nieparzystej jest funkcją nieparzystą?
(10) Gdy $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, wykazać ,że funkcje g_1, odpowiednio g_2 określone wzorami $g_1(x) = \frac{g(x)-g(-x)}{2}$, $g_2(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2}$ są odpowiednio: nieparzysta i parzysta, zaś $g = g_1 + g_2$.

Równość opisana w podpunkcie (6) zachodzi dla tzw. funkcji ciągłych. (Definicja ciągłości będzie nieco później -wszystkie rozważane przez nas funkcje elementarne są ciągłe na swych naturalnych dziedzinach.)

2 Przegląd wybranych funkcji elementarnych

Funkcja określająca znak liczby x, oznaczana $\operatorname{sgn}(x)$ przyjmuje wartość -1 dla $x < 0$, zero -dla $x = 0$ oraz 1 dla $x > 0$. (Z pewnych względów nie uznajemy jej za funkcję elementarną)

Moduł $|x|$ (czyli wartość bezwzględną) liczby x można teraz zdefiniować jako iloczyn: $|x| := x \cdot \operatorname{sgn}(x)$. Mamy równoważność:

$$|x| \leqslant M \;\Leftrightarrow\; (-M \leqslant x \wedge x \leqslant M).$$

Otrzymamy stąd łatwo tzw. *nierówności trójkąta:*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \qquad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|.$$

Funkcje wielomianowe (*wielomiany*), to funkcje postaci

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Jeśli dla tak zapisanego w jest $a_n \neq 0$, to n nazywamy stopniem w, pisząc $n = \deg(w)$ (po angielsku: *degree of a polynomial* = stopień (jakiegoś) wielomianu).

2.0.1 Funkcja wykładnicza o podstawie a

–to funkcja $\mathbb{R} \ni x \to a^x \in \mathbb{R}_+$ zdefiniowana w następujący sposób:

W przypadku $a = 1$ możemy wprost zdefiniować $1^x = 1$. Dalej zakładamy, że $a \neq 1, a > 0$.

1. Dla $x = 0$ przyjmujemy $a^0 = 1$,
2. dla $n \in \mathbb{N}$ definicja a^n ma charakter rekurencyjny: $a^n := a \cdot a^{n-1}$. (Gdy $n = 1$, mamy wcześniej zdefiniowane $a^{1-1} = a^0 = 1$, więc $a^1 = a \cdot 1 = a$.

3. Następnie dla ujemnych liczb całkowitych (postaci $k = -n, n \in \mathbb{N}$) przyjmujemy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

4. Dla ułamków postaci $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ funkcja potęgowa $g : \mathbb{R}_+ \ni x \to x^n \in \mathbb{R}_+$ jest bijekcją, co wykażemy nieco później, korzystając z własności funkcji ciągłych. Funkcję odwrotną nazywamy *funkcją pierwiastkową stopnia* n, zamiast $x = g^{-1}(y)$ piszemy $x = \sqrt[n]{y}$, lub $x = y^{\frac{1}{n}}$.

5. Dla dowolnej liczby wymiernej $r \in \mathbb{Q}$ mamy $r = \frac{k}{n}$ dla pewnych liczb $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, definiujemy $a^r := (a^{\frac{1}{n}})^k$.

Tak zdefiniowana potęga liczby a o wykładniku wymiernym ma pewne własności (one wręcz narzucają sposób definiowania tych potęg) i sprawdzamy je najpierw dla wykładników naturalnych, stosując metodę indukcji, potem przechodząc przez etapy 3,4,5 tej definicji. Zbierzemy je w poniższym zadaniu.

Przykładowe zadania 7. Wykazać, że

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad a^{rs} = (a^r)^s, \quad (ab)^r = a^r b^r, \quad \big(\frac{1}{a}\big)^r = \frac{1}{a^r}.$$

Sprawdzić, że dla $a > 1$ funkcja $\mathbb{Q} \ni r \to a^r$ jest silnie rosnąca, zaś w przypadku $a < 1$ –silnie malejąca.

Definicję a^x dla dowolnego wykładnika (niekoniecznie wymiernego) $x \in \mathbb{R}$ w przypadku $a > 1$ wprowadzamy wzorem:

$$a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

W przypadku $a < 1$ jest $\frac{1}{a} > 1$ i przyjmujemy $a^x := (\frac{1}{a})^{-x}$. Własności podane w poprzednim zadaniu zachodzą również dla wykładników dowolnych.

2.0.2 Logarytmy

Dla $a > 0, a \neq 1$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \to a^x$ jest silnie monotoniczna, przyjmuje każdą wartość dodatnią w pewnym punkcie (dowód później) i funkcję odwrotną nazywamy *logarytmem o podstawie* a, oznaczając ją $\log_a$. Tak więc

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Dziedziną logarytmu jest $(0, +\infty)$, zbiorem przyjmowanych wartości jest $\mathbb{R}$. W oparciu o własności z poprzedniego zadania wykazujemy, że

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \log_a(x^y) = y \log_a x, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Podstawę logarytmów naturalnych oznaczamy symbolem e i definiujemy jako granicę: $e := \lim_{n\to\infty}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$. Zamiast $\log_e x$ piszemy (w Polsce) $\ln x$. Zapis $\log x$ w polskiej literaturze oznacza $\log_{10} x$, zaś w literaturze anglojęzycznej $\log x = \log_e x$ (oni nie stosują raczej symbolu $\ln x$). Funkcję wykładniczą o podstawie e oznaczamy exp, tzn. $\exp(x) = e^x$ i nazywamy też *funkcją eksponencjalną* (eksponentą x). Tak więc, $\ln = (\exp)^{-1}$ (tu wykładnik -1 oznacza funkcję odwrotną!).

2.1 Funkcje trygonometryczne

Na poprzednim wykładzie przypomniałem jeszcze definicje funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych. Przypomnijmy, że będziemy określać wielkość kąta w *mierze łukowej*. Przez kąt ϕ, gdzie $\phi \in \mathbb{R}$ rozumiemy kąt oparty na łuku okręgu jednostkowego o długości ϕ, którego początek leży na półosi dodatniej. Łuk ten odmierzamy w kierunku "dodatnim", czyli przeciwnym do kierunku

ruchu wskazówek zegara, o ile $\phi \geqslant 0$, zaś w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara, gdy $\phi < 0$. Jednostką miary kąta odpowiadającą łukowi o długości takiej, jak promień koła (ang. "radius") nazywamy *radianem*. Kąt o mierze α stopni ma $\pi \cdot \frac{\alpha}{180}$ radianów. Wartości funkcji trygonometrycznych można odczytać patrząc na okrąg jednostkowy -konkretnie, koniec łuku odpowiadającego ϕ radianom ma współrzędne: $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi)$ w układzie kartezjańskim. Tak jest dla dowolnych $\phi \in \mathbb{R}$. Wartość $\operatorname{tg}\phi$ -jedynie dla $|\phi| < \frac{\pi}{2}$- odczytujemy przedłużając promień przechodzący przez ten koniec łuku do punktu przecięcia z prostą o równaniu $x = 1$. Ten punkt przecięcia ma współrzędne $(1, \operatorname{tg}\phi)$. Ponadto $\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$. Wartość kotangensa, $\operatorname{ctg}\phi$ definiujemy jako $\frac{1}{\operatorname{tg}\phi}$. (Uwaga: anglojęzyczne książki zamiast symbolu tg używają tan, zaś zamiast ctg -symbolu cot.)

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych -a jest ich wiele -można znaleźć w tablicach matematycznych. Wymieńmy tylko parę przykładowych:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1,\ \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha),\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\ \ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),\ \ 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$$

Funkcje te są okresowe, okres podstawowy dla sin oraz cos wynosi 2π, okresem podstawowym dla tg, ctg jest π. Funkcja cos jest parzysta, pozostałe trzy są nieparzyste. Z interpretacji na kole trygonometrycznym wynikają dla $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ nierówności: $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2.2 Funkcje cyklometryczne

Jak nazwa wskazuje, mierzą one długość łuku okręgu na podstawie danej jednej ze współrzędnych punktu będącego końcem tego łuku na okręgu jednostkowym. Definiuje się je jako odwrotne do restrykcji funkcji trygonometrycznych:

$$\operatorname{arc\,sin} = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}, \quad \operatorname{arc\,cos} = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}.$$

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór $[-1, 1]$. Jest to bowiem zbiór wszystkich wartości przyjętych przez funkcje sin (odpowiednio, cos) na tych przedziałach (dowód- później).

Analogicznie, definiujemy

$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}, \quad \operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1},$$

obie na dziedzinach równych $\mathbb{R}$, pierwsza z tych funkcji jest rosnąca (por. zadanie 6.(4)) i nieparzysta, druga maleje. Wykresy przedstawiam na wykładzie.

Oprócz profesjonalnych programów typu: „Mathematica", „Mathlab" jest wiele prostych, darmowych narzędzi do tworzenia wykresów funkcji (np. program GraphCalc), do których linki można znaleźć na stronie
http://pobierz.pl/programy/windows/edukacja-i-nauka/matematyka-i-fizyka

2.3 Funkcje hiperboliczne

Hiperbolą nazywamy krzywą będącą wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$, czyli krzywą o równaniu $xy = 1$ ale również hiperbolami są krzywe powstałe z tej krzywej przez obrót, symetrię względem prostej, lub podobieństwo. Przekształcenie zmiennych x, y na u, v, gdzie $u = (x + y), v = x - y$ jest złożeniem obrotu o kąt $\frac{\pi}{4}$ z podobieństwem w skali $\sqrt{2}$ i przekształcając otrzymamy równanie hiperboli w postaci $(x+y)(x-y) = 1$, czyli $x^2 - y^2 = 1$. Obrazem osi układu (asymptot hiperboli) $\{(x; y) : xy = 1\}$ jest para prostych o równaniach $x = y, x = -y$ -to są asymptoty ukośne hiperboli $\{(x; y) : x^2 - y^2 = 1\}$. Ograniczmy się do gałęzi $\{(x; y) : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$ (przecinającej oś OX w punkcie $(1, 0)$). Jeśli

na niej oznaczymy punkt P jako koniec łuku o długości φ o początku w $(1;0)$ skierowanego ku górze, gdy $\varphi > 0$, ku dołowi dla $\varphi \leqslant 0$, otrzymamy punkt P o współrzędnych $(\cosh(\varphi); \sinh(\varphi))$. Tak geometrycznie można zdefiniować funkcje: sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny. (Gdy łuk na hiperboli zastąpimy łukiem na okręgu, otrzymamy zwykły sinus i cosinus kąta φ.)

Ponieważ na razie nie mamy prostych wzorów na długości łuków hiperboli, podamy jako "oficjalną definicję" inny wzór dla dowolnego $\varphi \in \mathbb{R}$ (jako część parzystą -odp. nieparzystą- z funkcji wykładniczej):

$$\sinh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \qquad \cosh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}.$$

Ponadto mamy tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny :

$$\mathrm{tgh}x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \qquad \mathrm{ctgh}x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}.$$

Niektóre wzory dla funkcji hiperbolicznych przypominają wzory trygonometryczne. Pozostawiamy je do sprawdzenia jako proste ćwiczenie.

Przykładowe zadania 8. Wykazać następujące równości: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ („jedynka hiperboliczna"), $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$, $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$, $\cosh(2t) = (\cosh t)^2 + (\sinh t)^2$.

Wykresy funkcji (nieparzystej) sinh oraz (parzystej) cosh nie są do siebie wcale podobne. Pierwsza z nich przypomina nieco wykres funkcji $y = x^3$ - jednak w zerze przecina oś OX pod kątem $\pi/4$ i dla dużych x rośnie znacznie szybciej. Jest bijekcją $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Druga spełnia warunek $\forall_x \cosh x \geqslant 1, \cosh 0 = 1$.

Funkcje hiperboliczne odwrotne są określane jako *„funkcje polowe"* : area sinus hiperboliczny =arsinh = $(\sinh)^{-1}$. Rozwiązując równanie wykładnicze otrzymamy $\mathrm{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Area cosinus hiperboliczny arcosh = $(\cosh|_{[0,+\infty)})^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ spełnia relację $\mathrm{arcosh}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

Nazwa pochodzi od równości pola obszaru zawartego między odcinkami [O,P], [O,(1;0)] i wspomnianym łukiem na hiperboli z wartością $\frac{\varphi}{2}$, podczas gdy $P = (\cosh\varphi; \sinh\varphi)$, zaś $\mathrm{arsinh}(\sinh\varphi) = \varphi$.

2.4 Ciągi i ich granice

Ciąg (oznacz. (f_n) lub $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) w zbiorze Y, to funkcja $f : \mathbb{N} \to Y$. Zamiast $f(n)$ piszemy jednak f_n i element ten nazywamy n-tym wyrazem naszego ciągu. Częściej niż f używamy innych liter. Często podajemy sam wzór na n-ty wyraz ciągu, np. $(1 + \frac{1}{n})^n$. Gdy $Y \subset \mathbb{R}$, mówimy o ciągach liczbowych. Ciąg jest niemalejący, gdy określająca go funkcja jest niemalejąca na dziedzinie $\mathbb{N}$.

Definicja 3 *(**Granicy ciągu**). Mówimy, że ciąg liczbowy o wyrazach a_n zmierza (jest zbieżny) do granicy $g \in \mathbb{R}$, pisząc $g = \lim a_n$ lub $a_n \to g$, jeśli*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant M}\ |a_n - g| < \epsilon.$$

Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$ o powyższej własności.

Wyrażenie: $\exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant M}\ |a_n - g| < \epsilon$ odczytujemy: "$|a_n - g| < \epsilon$ *dla n dostatecznie dużych*", lub: "$|a_n - g| < \epsilon$ *dla wszystkich n od pewnego miejsca począwszy*", a zaprzeczeniem tego warunku jest: "$|a_n - g| \geqslant \epsilon$ *dla nieskończenie wielu n*". Zaprzeczeniem zbieżności a_n do granicy g jest więc istnienie takiego ϵ, by $|a_n - g| \geqslant \epsilon$ dla nieskończenie wielu n.

Na przykład, ciąg stały (taki, że $\forall_n\ a_n = a_{n+1}$) jest zbieżny (do $g = a_1$). Ciąg kolejnych liczb naturalnych ($a_n = n$) nie jest zbieżny do żadnej granicy, bo gdy $\epsilon = 1$, dla dowolnego g mamy $|g - n| \geqslant 1$, o ile tylko $n > g + 1$. Ten ciąg nie jest ograniczony, jest rosnący. Ale nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny -na przykład, nie istnieje granica ciągu o wyrazach $(-1)^n$. [dowód: żadna liczba $a \leqslant 0$ nie jest jego granicą, bo dla $\epsilon = 1$ i dla n parzystych ($n = 2k$, takich n jest

nieskończenie wiele) mamy $|(-1)^{2k} - a| = 1 + |a| \geqslant 1$. Zaś dla $a > 0$ analogiczna wartość $|(-1)^n - a|$ będzie większa od 1 dla wszystkich n nieparzystych.]

Jeżeli g jest granicą ciągu, fakt ten zapisujemy też symbolem $a_n \to g$. Gdy ciąg jest niemalejący: $\forall_n\ a_n \leqslant a_{n+1}$, zamiast $a_n \to g$ piszemy czasem $a_n \uparrow g$.

Zauważmy, że $|a_n - g| < \epsilon$ można zapisać w postaci koniunkcji nierówności:

$$g - \epsilon < a_n < g + \epsilon.$$

Przedział otwarty $(g-\epsilon, g+\epsilon)$ nazwiemy ϵ-otoczeniem punktu g na osi liczbowej. Wówczas zbieżność $a_n \to g$ można wyrazić słowami: *w dowolnym otoczeniu punktu g znajdują się wszystkie -począwszy od pewnego miejsca - wyrazy ciągu.*

Niech $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (**rozszerzona oś liczbowa**). Dla $E \subset \mathbb{R}$ przyjmujemy $\sup E = +\infty$(odp. $-\infty$), gdy zbiór E nie jest ograniczony z góry (odpowiednio, z dołu).

Granice Niewłaściwe Mówimy, że *ciąg liczbowy (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$*, pisząc $\lim a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$, gdy $\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0}\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n > M$. Zamieniając warunek $a_n > M$ na $a_n < M$ otrzymamy definicję warunku $a_n \to -\infty$.

Twierdzenie 2 (O jednoznaczności granic) *Jeżeli mamy zarówno $a_n \to g$, jak i $a_n \to g_1$, to $g = g_1$.*

Twierdzenie 3 *Zbieżność nie zależy od początkowych wyrazów ciągu: Gdy $\exists_k\forall_{n\geqslant k}\ \ a_n = b_n$, to $\ \ a_n \to g \Leftrightarrow b_n \to g$.*

Twierdzenie 4 (O istnieniu granic ciągów monotonicznych) *Gdy ciąg (a_n) jest monotoniczny (nierosnący, bądź niemalejący), to ma granicę $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Granica ta jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jest ograniczony. Dokładniej, gdy (a_n) jest niemalejący, to $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, a ciąg malejący - zmierza do kresu dolnego jego zbioru wyrazów.*

Twierdzenie 5 (O trzech ciągach) *Gdy $\forall_n\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz istnieją (jednakowe) granice $g = \lim a_n = \lim c_n$, to ciąg (b_n) też zmierza do g.*

Twierdzenie 6 (O przechodzeniu do granicy w nierównościach) *Jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to g_1$, przy czym $\forall_n\ a_n \leqslant b_n$, to $\ \ g \leqslant g_1$.*

Zauważmy, że dla ostrych nierówności: $\forall_n a_n < b_n$ nie można uzyskać wniosku o ostrej nierówności granic! Natomiast mamy

Twierdzenie 7 *Jeżeli $\lim a_n = g$ oraz $g < x$, to również $a_n < x$ od pewnego miejsca począwszy, czyli $\exists_k\forall_{n\geqslant k}\ a_n < x$.*

Twierdzenie 8 *Każdy ciąg zbieżny (czyli mający granicę skończoną) jest ograniczony: $\exists \lim a_n = g \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$.*

Twierdzenie 9 *Jeżeli $a_n \to 0$ oraz $\sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, to $a_n \cdot b_n \to 0$.*

Twierdzenie 10 (O sumie granic) *Jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to g_1$, to $a_n + b_n \to g + g_1$.*

Twierdzenie 11 (O iloczynie granic) *Jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to g_1$, to $a_n \cdot b_n \to g \cdot g_1$.*

Twierdzenie 12 (O ilorazie granic) *Jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to g_1$, przy czym $g_1 \neq 0$ to $b_n \neq 0$ począwszy od pewnego miejsca oraz $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{g}{g_1}$.*